

مقدمة في

الرياضيات البحتة للتجاريين

إعداد

دكتور/ حسن محمد على

أستاذ مساعد بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين

الناشر

المكتبة العلمية بالزقازيق

٢٠٠١

شركة ناس للطباعة
٢٣ ش رشدى عابدين - ٣٩٢٥٣٧٦

تقديم:

مما لا شك فيه أن أساليب التحليل الكمية تحتل الآن مكاناً مرموقاً فى كافة الدراسات والأبحاث لمختلف المجالات الإقتصادية والإجتماعية، حيث أصبح من الضرورى أن تعتمد هذه الدراسات والأبحاث على الموضوعية المبنية على الأدلة والبراهين وطرق الإقناع حتى يمكن مواكبة التقدم التكنولوجى الحديث الذى فرض نفسه فى كافة مجالات الحياة لحاقاً به وتطوراً معه. لذلك جاء هذا الكتاب لكى يقدم بعض الموضوعات الأساسية فى مجال الرياضيات البحتة والتى تخدم الدارسين من طلاب كليات التجارة وكذلك العاملين فى المجالات الإقتصادية والإدارية.

ويمثل هذا الكتاب مقدمة فى الرياضيات البحتة وبعض تطبيقاتها فى المجال التجارى ويتضمن الكتاب سبعة أبواب كالتالى:

الباب الأول: موضوعات تمهيدية

الباب الثانى: نظرية الفئات والاحتمالات

الباب الثالث: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

الباب الرابع: الأعداد الطبيعية والمجاميع

الباب الخامس: المتواليات والمتسلسلات

الباب السادس: الإستنتاج الرياضى

الباب السابع: المتباينات والبرمجة الخطية

ولقد راعيت فى عرض موضوعات هذا الكتاب أن يفسح المجال رحباً لنقاش يجتذب إنتباه الطلاب وعقولهم ويحقق سير أمثل للمحاضرة يشارك فيه الطالب مشاركة فعلية فى التحليل والإستنتاج ويظل مستنفراً يقظاً بدلاً من أن يترك فريسة سهلة لغفوة النسخ الرتيب.

ويتضمن الكتاب عدداً كبيراً من الأمثلة المحلولة، هذه الأمثلة ليست تكراراً مملاً للفكرة نفسها، وعلى الوتيرة والمستوى نفسيهما، ولكنها تتدرج فى مستواها من السهل إلى الصعب بحيث يسهل على القارئ فهمها والإحاطة بها، كما أنها تطرق أفكاراً مستوحاة من واقع الحياة وخاصة فى مجالى الإدارة والإقتصاد. ولم أترك فرصة متاحة لعرض التطبيقات الإدارية والإقتصادية إلا إهتبلتها، مستهدفاً بذلك ربط النظرية بالتطبيق ومترجماً مهمة الجامعة إلى خدمة المجتمع وحل مشكلاته.

وأنى إذ آمل أن يحقق هذا الكتاب الهدف المنشود أرجو من الله سبحانه وتعالى أن أكون قد وفقت فى عرض موضوعاته.

والله الموفق والهادى إلى سواء السبيل ،

المؤلف

الباب الأول
موضوعات تمهيدية

تتكون فئة الأعداد الحقيقيـة مـن مجموعـة الأعـداد السـالبة (صحيحـة وكسرية) والأعداد الموجبة (صحيحة وكسرية).

وتتكون الأعداد السالبة مـن مجموعـة الأعـداد التـى تقل قيمتهـا عـن الصفر ونشاهد مثل هذا النوع من الأعداد على مقاييس درجة الحرارة مثـلا، وتتكون الأعداد الموجبة من مجموعة الأعداد التـى تزيـد قيمتهـا عـن الصفـر ويمثل شكل (١-١) فئة الأعداد الحقيقية. بحيـث أن جميـع الأعـداد التـى عـن يمين الصفر هى أعداد موجبة والتى على يسار الصفر أعداداً سالبة.

٤- ٣- ٢- ٢√- ١- ٠,٥- صفر ٠,٥ ١ ٢√ ٢ ٣ ٤

ومجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والتى تأخذ الصـورة ١، ٢، ٣، .... تسمى بفئة الأعداد الطبيعية وهى حالة خاصة من الأعداد الحقيقية والتـى سوف نتاولها بالتفصيل بعد ذلك إن شاء الله.

تعاريف:

١- الكميـات الموجبـة والسـالبة: تعـرف الكميـة الموجبـة بأنهـا تلـك الكميـة المسبوقة باشارة (+) والكمية السالبة هى تلك الكمية المسبوقة باشارة (-). والكميـات الغير مسبوقة باشـارة (-) أو (+) تعريـف أيضـاً بالكميـات الموجبة.

٢- القيمة المطلقة أو المقياس: تعرف القيمة المطلقة لأى كمية موجبة أو سالبة بأنها تلك الكمية الموجبة بمعنى أن القيمة المطلقة هى القيمة العددية بغض النظر عن الإشارة ويرمز للقيمة المطلقة بالعلامة | |.

أى أن:

القيمة المطلقة للرقم -٣ يعبر عنها بالعلامة |-٣| وهى تساوى ٣

والقيمة المطلقة للرقم ٥ يعبر عنها بالعلامة |٥| وهى تساوى ٥

٣- الثوابت والمتغيرات: يعرف المقدار الثابت بأنه تلك الكمية التى لا تتغير قيمتها من فترة لأخرى مثل أ = ٥ بينما المتغير يأخذ قيماً مختلفة مثل الأسعار، الدخل، الوزن وغيرها، ودائما تستخدم الحروف الأبجدية أ ، ب ، جـ ، د للثوابت بينما الحروف س ، ص ، ع للمتغيرات . فمثلا إذا قلنا أن س = ٧ فإن س مقدار ثابت يأخذ القيمة ٧ فقط بينما إذا قلنا أن س أقل من ٧ فإن س تصبح متغيراً تأخذ جميع الأعداد التى أقل من الرقم ٧.

٤- الجمع والطرح الجبرى: معناه جمع أو طرح الحدود المتشابهه ذات الأساسات الجبرية الواحدة والقوة الواحدة طبقا للاشارة التى بينهما.

فمثلا:

(١) ٥س^{٢} + ٢س^{٢} = ٧س^{٢} ،

(٢) ٤س^{٣} + ٣س^{٢} – س^{٣} + ٤س^{٢} = ٣س^{٣} + ٧س^{٢}

أما إذا كانت الحدود الجبرية مختلفة فى الأساسات والقوة فلا يمكن جمعها أو طرحها مثل:

٥س^{٢} + ٣ أ − ٤ص^{٢} فهذه لا يمكن جمعها أو طرحها، وذلـك لاختـلاف الحدود التى بينها اشارات + أو −.

٥- الضرب والقسمة: عند ضرب أو قسمة عدة حدود جبرية لابد من مراعاة قاعدة الاشارات التالية:

+ × + = + ، + ÷ + = +

− × + = − ، − ÷ + = −

+ × − = − ، + ÷ − = −

− × − = + ، − ÷ − = +

ويلاحظ أن الاشارة الناتجة (+) فى حالة تساوى الاشارات المضروبة أو المقسومة وتساوى(−) فى حالة اختلاف الاشارات المضروبة أو المقسومة.

أما عند ضرب أو قسمة أكثر من حدين مختلفين فى الاشارات فإنه:

(أ) إذا كان عدد الاشارات السالبة زوجيا فيكون الجواب مقدار موجب.

(ب) إذا كان عدد الاشارات السالبة فرديا فيكون الجواب مقدار سالب.

فمثلا:

(١) −١٢ س ص × ٣س = −٣٦ س^{٢}ص

(٢) ٣أ ب ÷ ٢ أ = $\frac{٣}{٢}$ ب

(٣) ٢س × ٣س × −٢ع × ٤ص = −٤٨ س^{٢} ص ع

(٤) ٢س × ٣ص × −٢ع × −٤س = ٤٨ س^{٢} ص ع

٦- الأسس: فى المقدار الجبرى س^{ن} يسـمى (س) بالأسـاس و (ن) بـالأس أو القوة وبناء عليه فإن قاعدة الضرب والقسمة فى هذه الحالة تصبح:

(١) $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}+\text{م}}$ فمثلا $\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٣} = \text{س}^{٥}$

(٢) $\text{س}^{\text{ن}} \div \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}-\text{م}}$ ،، $\text{س}^{٣} \div \text{س}^{٢} = \text{س}$

(٣) $(\text{س}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}\,\text{م}}$ ،، $(\text{س}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٦}$

(٤) $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \text{س}^{١/\text{ن}}$ ،، $\sqrt[٢]{\text{س}} = \text{س}^{١/٢}$

(٥) $\text{س}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}}$ ،، $\text{س}^{-٥} = \frac{١}{\text{س}^{٥}}$

(٦) $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\text{م}/\text{ن}}$ ،، $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{٢/٣}$

(٧) $\text{س}^{\text{صفر}} = ١$ بمعنى أن أى مقدار جبرى مرفوع للقوة صفر = ١

ويلاحظ أن الصفر فى حالة عمليات الضرب يحول الناتج إلى صفر مهما كانت الحدود المضروبة. أما فى حالة القسمة فإن الأمر يختلف بمعنى أن صفر على أى مقدار جبرى = صفر وأى مقدار جبرى على الصفر يساوى مالا نهاية (∞) وهى مقدار كبير جدا أكبر من أى مقدار يمكن تخيله. بينما صفر على صفر فهى كمية غير معينة أو غير محددة.

مثال(١)

أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

٣س + ٣ص − ٢ع

−٢س − ٣ص + ٦ع

٥س − ٥ص + ٨ع

الحل:

نلاحظ ترتيب الحدود المتشابهة فى المقادير الثلاثة فيتم جمع كل حد من حدود المقدار الجبرى على نظيره فى المقادير الأخرى طبقا لقاعدة الاشارات السابقة وعلى ذلك فإن ٣س - ٢س + ٥س = ٦س

، ٣ص - ٣ص - ٥ص = -٥ص وأخيرا -٢ع + ٦ع + ٨ع = ١٢ع

وعلى هذا تصبح النتيجة النهائية هى ٦س - ٥ص + ١٢ع

مثال(٣)

أوجد ناتج ما يلى:

(٤س - ٣ص + ٢ع) (٢س + ٣ص)

الحل:

فى عملية ضرب المقادير الجبرية نأخذ كل حد من حدود المقدار الجبرى الثانى فيضرب فى كل حد من حدود المقدار الجبرى الأول فمثلا ٢س تضرب فى (٤س - ٣ص + ٢ع) لتصبح النتيجة ٨س^{٢} - ٦س ص + ٤ س ع وبالمثل الحد الثانى ٣ص يضرب فى نفس المقدار مرة ثانية لنحصل على ١٢ س ص - ٩ ص^{٢} + ٦ص ع ، وباستخدام قاعدة الجمع والطرح نحصل على ٨س^{٢} + ٦ س ص + ٤س ع + ٦ ص ع - ٩ص^{٢}

مثال(٣)

أوجد خارج قسمة المقدار $\frac{\text{٢٤س}^{٤}\text{ص}^{٧}\text{ع}^{٣}\text{هـ}}{\text{٣س}^{٢}\text{ص}^{٣}\text{ع}^{٣}}$

الحل:

لحل هذا المثال نستخدم قوانيـن الأسـس السـابقة ونضـع ذلـك المقدار على الصورة.

$$\frac{٢٤}{٣} س^{٤-٢} \times ص^{٧-٣} \times ع^{٣-٣} \times هـ = ٨س^{٢} ص^{٤} هـ$$

مـثـال(٤)

مقداران جبريان حاصل ضربهما هو ٦ $أ^{٢}$ − أب − ٢$ب^{٢}$ وأحدهما هو ٢أ + ب أوجد المقدار الجبرى الثانى.

الحل:

نلاحظ أن المقدار الأول × المقدار الثانى = ٦ $أ^{٢}$ − أب − ٢$ب^{٢}$

وبالتعويض عن أحد المقدارين بـ ٢أ + ب فيكون المقدار الثانى هو خارج قسمة حاصل ضرب المقدارين على المقدار المعلوم . أى أن:

المقدار الجبرى المطلوب = ٦$أ^{٢}$ − أب − ٢$ب^{٢}$ ÷ ٢أ + ب

ويمكن ايجاد ذلك المقدار باتباع الأسلوب التالى:

٦$أ^{٢}$ − أب − ٢$ب^{٢}$	٢أ + ب
٦$أ^{٢}$ + ٣ أب	٣أ − ٢ب
−٤أب − ٢ $ب^{٢}$	
+٤أب + ٢ $ب^{٢}$	
صفر	

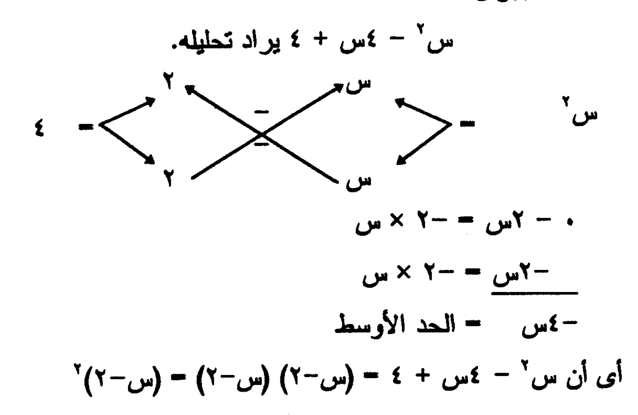
وعلى هذا فإن المقدار الجبرى المطلوب هو ٣أ - ٢ب بحيث أن

(٣أ - ٢ب) (٢أ + ب) = ٦أ^{٢} - أب - ٢ب^{٢}

٧- تحليل المقادير الجبرية: يقال أن مقدار جبرى ما قابل للتحليل إذا امكن كتابته كحاصل ضرب لعدة مقادير جبرية كل منها أقل درجة من المقدار الأصلى، وهناك عدة طرق تستخدم فى التحليل مثل:

(أ) طريق المقص: تتلخص هذا الطريق فى ايجاد مقدارين جبريين من الدرجة الأول التى هى عوامل كثيرة الحدود من الدرجة الثانية وتحتوى على ثلاثة حدود. وتوضيحا لذلك نفرض أن لدينا المقدار الجبرى.

س^{٢} - ٤س + ٤ يراد تحليله.



∴ - ٢س = -٢ × س

-٢س = -٢ × س

-٤س = الحد الأوسط

أى أن س^{٢} - ٤س + ٤ = (س-٢) (س-٢) = (س-٢)^{٢}

مثال(٥)

حلل المقدار س^{٢} - س - ٦ باستخدام طريقة المقص

الحل:

س		٣
س		٢

أى أن $س^٢ - س - ٦ = (س-٣)(س+٢)$

(ب) طريق التجميع: تتلخص هذه الطريقة فى ايجاد العوامل المشتركة بين المقادير الجبرية إن أمكن ذلك فمثلا المقدار الجبرى $س^٢ + ٢س + ١$ يمكن تحليله بعد تحويل الصورة السابقة إلى الصورة $س^٢ + س + س+١$ وبأخذ $(س^٢ + س)$ كحد و $(س+١)$ كحد آخر. ثم نأخذ س كعامل مشترك من الحد الأول أى أن

$س^٢ + ٢س + ١ = س^٢ + س + س + ١$

$= س (س + ١) + (س + ١)$

$= (س + ١) (س + ١) = (س + ١)^٢$

مـثـال(٦)

حلل المقدار $أ^٢ - ب^٢$ إلى عوامله الأولية باستخدام طريقة التجميع.

الحل:

المقدار السابق يمكن كتابته على الصورة $أ^٢ - ب^٢ + أب - أب$ ثم نأخذ $أ^٢$ مع أب كحد أول ثم $- ب^٢$ مع $-$ أب كحد ثانى كالآتى:

$أ^٢ - ب^٢ = أ^٢ + أب - ب^٢ - أب = أ^٢ + أب - (ب^٢ + أب)$

$= أ (أ + ب) - ب (أ + ب)$

$= (أ + ب) (أ - ب)$

(جـ) طريق الباقي: إذا كان لدينا مقدار جبرى من الدرجة الثانيـة فـى س مثلا وحصلنـا علـى أحـد العوامـل فيمكـن ايجـاد العوامـل الأخـرى باستخدام طريقـة القسـمة المطولـة فمثـلاً (س+١) عـامل مـن عوامـل المقدار الجبرى $س^{٣} + ١$ وذلك لأن س = -١ تجعل المقـدار السـابق = صفر فيكون احد العوامل هو (س - (-١)) = س + ١ وللحصـول على الباقى نقسم المقدار الجـبرى علـى س + ١ . بمعنـى أن نسـتخدم طريقة القسمة المطولة لنحصل على تحليل ذلك المقدار.

$(س^{٣} + ١) = (س + ١) (س^{٢} - س + ١)$

٨- الفرق بين مربعين والفرق بين مكعبين:

يقال للمقدار $س^{٢} - ص^{٢}$ بأنه عبارة عن الفرق بين مربعى الكميتين س ، ص ويحلـل إلـى (س - ص) (س + ص) ، ويقـال للمقـدار $س^{٣} - ص^{٣}$ بأنه عبارة عن الفرق بين مكعبى الكميتيـن س ، ص ويحلـل إلـى $(س - ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

ويقـال للمقـدار $س^{٣} + ص^{٣}$ بأنـه عبـارة عـن مجمـوع مكعبـى الكميتيـن س، ص ويحلل إلى $(س + ص) (س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

ويقال للمقدار $س^{٢} + ص^{٢}$ بأنه عبارة عن مجموع مربعى الكميتيـن س ، ص ولا يمكن تحليله إلى عوامل حقيقية.

٩- الجذور: هى صورة أخرى تظهر فيها الأعداد الحقيقيـة ومنهـا الجـذور التربيعية والتكعيبية والنونية فـالجذر التربيعى يرمـز لـه بـالرمز $\sqrt{العدد}$ وهو عبارة عن عدد آخر حاصل ضربه فى نفسه يساوى العـدد الأصلـى الأول فمثلا الجذر الـتربيعى للعـدد ٤ = $\sqrt{٤}$ = ٢ بحيـث أن ٢ × ٢ = ٤

وبالمثل يمكن تعريف الجذر التكعيبي لمقدار ما = $\sqrt[3]{\text{العدد}}$ وهو عبارة عن عدد آخر لو ضرب في نفسه ثلاث مرات لنتج لنا العدد الأصلي الأول فالجذر التكعيبي للعدد ٢٧ = $\sqrt[3]{27}$ = ٣ بحيث أن ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧.

وتعميما لهذا فإن الجذر النوني للمقدار س يكتب $\sqrt[ن]{س}$

وتتمتع الجذور بمجموعة من الخصائص نوجزها فيما يلي:

(أ) الجذر النوني لحاصل ضرب كميات مختلفة = حاصل ضرب الجذر النوني لكل كمية والعكس صحيح . أى أن:

$$\sqrt[ن]{أ\ ب\ جـ} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{جـ}$$

(ب) الجذر الميمي للجذر النوني للمقدار س يساوى الجذر (ن × م) لذلك المقدار ، أى أن:

$$\sqrt[م]{\sqrt[ن]{س}} = \sqrt[م ن]{س}$$

(جـ) القوة الميمية للجذر النوني للعدد (س) يساوى الجذر النوني للمقدار ($س^م$) أى أن:

$$(\sqrt[ن]{س})^م = \sqrt[ن]{س^م}$$

(د) الجذر النوني للنسبة ($\frac{س}{ص}$) يساوى الجذر النوني للعدد (س) مقسوما على الجذر النوني للعدد (ص) . أى أن:

$$\sqrt[ن]{\frac{س}{ص}} \qquad \frac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}}$$

(هـ) أن قيمة الجذر النونى للمقدار ($س^م$) لا تتغير إذا ضرب دليل الجـذر ($ن$) فى عدد وليكن أ ورفعنا فى نفس الوقـت المقدار المجـذور ($س^م$) لنفس العدد أ أى أن:

$$\sqrt[ن]{س^م} = \sqrt[ن\,أ]{س^{أ\,م}}$$

مـثـال(٧)

أوجد قيمة الجذر $\sqrt[٢]{\sqrt[٣]{٦٤}}$

الحل:

$$\sqrt[٢]{\sqrt[٣]{٦٤}} = \sqrt[٦]{٦٤} = (٦٤)^{\frac{١}{٦}} = (٢^٦)^{\frac{١}{٦}} = ٢$$

مـثـال(٨)

أوجد قيمة الآتى:

(١) $\sqrt{٨} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٣٢}$

(٢) $٥\sqrt{٣} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢٥}$

الحل:

$$\sqrt{٨} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٣٢} = ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

$$٥\sqrt{٣} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢٥} = ٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٥}$$

$$= ٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}$$

١٠- الصورة العلمية للاعـداد الحقيقيـة : يجـب ملاحظـة الآتـى قبـل تعريـف الطريقة العلمية لكتابة الأعداد أن

$١٠^{صفر} = ١$ ، $١٠^{١} = ١٠$ ، $١٠^{٢} = ١٠٠$ ، $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ ..... الخ كما

أن $١٠^{-١} = ٠,١$ ، $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ ، ، $١٠^{-٣} = ٠,٠٠١$ ، ..... الخ

وفى علوم الفيزياء والكمياء تكون أحياناً صغيرة جداً أو كبيرة جداً أو كبيرة جداً مما يصعب فيها قراءة تلك الأعداد وعلى هذا فإن الطريقة العلمية لكتابة العدد (ن) بالطريقة العلمية هى:

العدد ن = $ن^{/} \times ١٠^{م}$

حيث $ن^{/}$ أصغر من أو يساوى ١٠ وأكبر من أو يساوى الواحد الصحيح و م عدد صحيح موجب أو سالب. والطرف الأيسر يسمى بالصورة العلمية للعدد ن.

فمثلا المسافة التى يقطعها جسم الضوء فى سنة زمنية واحدة هى ٥٨٧٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ميل وتكتب بالطريقة العلمية كالآتى $٥,٨٧ \times ١٠^{١٢}$ ميل.

ومثال آخران قطر جزيئى مادة ما يساوى ٠,٠٠٠٠٠٠٥ ويكتب كالآتى ٥×١٠^{-٧} سم.

وبهذه الطريقة تكتب جميع الأعداد سواءا أكانت كبيرة جداً أو صغيرة جداً بطريقة سهلة.

١١- اللوغاريتمات: لوغاريتم أى عدد لأساس معين هو القوة التى يرفع إليها ذلك الأساس لكى يكون الناتج مساويا ذلك العدد. ودائماً ما تستخدم الكلمة (لو) لترمز للوغاريتم . أى أنه إذا كانت

$أ^{س} = ب$

فإن $لو_{أ}\, ب = س$

وتقرأ لوغاريتم العدد ب للأساس أ = س فمثلا:

$\log_{2} 8$ = ٣ وذلك لأن $2^{3} = 8$

$\log_{5} 125$ = ٣ وذلك لأن $5^{3} = 125$

$\log_{10} 100$ = ٢ وذلك لأن $10^{2} = 100$

واللوغاريتم للأساس ١٠ تسمى باللوغاريتمات المعتادة واللوغاريتمات للأساس هـ = ٢,٧١٨ تسمى باللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات لأى أساس آخر تسمى باللوغاريتمات لذلك الأساس. ونلاحظ أن المعادلة اللوغاريتمية هناك ثلاثة مجاهيل هى أ = الأساس ، س = قيمة اللوغاريتم ، ب = العدد المطلوب ايجاد لوغاريتمه فإذا علمنا اثنين منهما كان فى مقدورنا ايجاد المجهول الثالث، واللوغاريتمات بصفة عامة تستخدم فى الحديث وقد تم تجهيز جداول رياضية تمكن من استخدام اللوغاريتمات فى العمليات الحسابية وأيضاً معظم الآلات الحاسبة مزودة بامكانية استخراج لوغاريتم أى عدد مهما كان بشرط أن يكون ذلك العدد موجبا. وكما تسمى س بلوغاريتم العدد ب فإن ب تسمى بالعدد المقابل للوغاريتم س ، ولزيادة فهم واستيعاب اللوغاريتمات نورد فيما يلى النظريات والقوانين التى تساهم فى زيادة فهم موضوع اللوغاريتمات.

(أ) لوغاريتم حاصل ضرب عدة مقادير موجبة = مجموع لوغاريتمات كل مقدار جبرى.

بمعنى أن :

لوأ (س ص ع) = لوأ س + لوأ ص + لوأ ع

(ب) لوغاريتم خارج قسمة أى عددين موجبين = لوغاريتم البسط - لوغاريتم المقام.

بمعنى أن:

$$\text{لو}_{\text{أ}} \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{ص}$$

(جـ) لوغاريتم أى عدد ما (س) مرفوع لقوة ما (ن) يساوى تلك القوة ن فى لوغاريتم ذلك العدد س. أى أن:

$$\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}$$

والطالب فى هذه المرحلة قد اعتاد على كيفية استخدام جداول اللوغاريتمات وسوف نكتفى ببعد الأمثلة والتطبيقات الحسابية.

مثال(٩)

احسب لوغاريتمات الأعداد التالية للأساس ١٠.

٦٣٠ ، ٦٣٠٠ ، ١٥٠٠٠٠٠ ، ٠,٠٥٣ ، ٠,٠٠٠٠٠٥٣

الحل:

٦٣٠ = ٦,٣٠ × $١٠^{٢}$ وعلى ذلك فإن

$\text{لو}_{١٠}$ ٦٣٠ = $\text{لو}_{١٠}$ ٦,٣٠ + ٢$\text{لو}_{١٠}$ ١٠

= ٠,٧٩٩٣ + ٢ = ٢,٧٩٩٣

$\text{لو}_{١٠}$ ٦٣٠٠ = ٦,٣٠ × $١٠^{٣}$ = وعلى ذلك فإن

$\text{لو}_{١٠}$ ٦٣٠٠ = $\text{لو}_{١٠}$ ٦,٣٠ × ٣ $\text{لو}_{١٠}$ ١٠ = ٣,٧٩٩٣

$\text{لو}_{١٠}$ ١٥٠٠٠٠٠ = $\text{لو}_{١٠}$ (١,٥ × $١٠^{٦}$)

$= \text{لو}_{١٠}\,١,٥ + ٦\ \text{لو}_{١٠}\,١٠ = ٦,١٧٦١$

$\text{لو}_{١٠}\,٠,٠٥٣ = \text{لو}\,(٥,٣ \times ١٠^{-٢}) = \text{لو}_{١٠}\,٥,٣ - ٢\ \text{لو}_{١٠}\,١٠$

$= -١,٢٧٥٧$

$\text{لو}_{١٠}\,٠,٠٠٠٠٠٠٥٣ = \text{لو}\,(٥,٣ \times ١٠^{-٦})$

$= \text{لو}_{١٠}\,٥,٣ - ٦\ \text{لو}_{١٠}\,١٠ = -٥,٢٧٥٧$

مـثـال(١٠)

أوجد قيمة س فى الحالات التالية:

$\text{لو}_{١٠}\,\text{س} = ١,٨٧٦٢$ ، $\text{لو}_{٢}\,\text{س} = ٠,٩٢٤٣$

$\text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٣,٧٨٥$

الحل:

باستخدام العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات نستطيع ايجاد قيمة س

$\because \text{لو}_{١٠}\,\text{س} = ١,٨٧٦٢ \quad \therefore \text{س} = ١٠^{١,٨٧٦٢} = ٧٥,١٩٦٩$

$\because \text{لو}_{٢}\,\text{س} = ٠,٩٢٤٣ \quad \therefore \text{س} = ٢^{٠,٩٢٤٣} = ١,٨٩٧٨$

$\because \text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٣,٧٨٥ \quad \therefore \text{س} = ٥^{٣,٧٨٥} = ٤٤٢,١٨٢٤$

مـثـال(١١)

أوجد قيمة س للعلاقة:

$$\text{س} = \sqrt[٣]{\frac{(٥٣,٧)^{٢}\ \sqrt[٢]{٣,٧٣}}{(٦,٢٥)^{٣}\ \sqrt[٥]{(٣٥,٩)^{٢}}}}$$

الحل:

فى البداية نستخدم قوانين الأسس واللوغاريتمات لحل هذا المثال

$$\therefore \text{س} = \left(\frac{٥٣,٧ \times (٣,٧٣)^{\frac{١}{٢}}}{(٦,٢٥)^{٣} \times (٣٥,٩)^{\frac{٢}{٥}}} \right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\therefore \text{لو}_{١٠}\text{س} = \frac{١}{٢}\text{لو} \left(\frac{٥٣,٧ \times (٣,٧٣)^{\frac{١}{٢}}}{(٦,٢٥)^{٣} \times (٣٥,٩)^{\frac{٢}{٥}}} \right)$$

$$= \frac{١}{٣} \left[\text{لو} \; (٥٣,٧) \times (٣,٧٣)^{\frac{٢}{٢}} \right]$$

$$- \text{لو} \left[(٦,٢٥)^{٣} \times (٣٥,٩)^{\frac{٢}{٥}} \right]$$

$$= \frac{١}{٣} \left(\text{لو } ٥٣,٧ + \frac{١}{٢} \; ٣,٧٣ - ٣ \text{ لو } ٦,٢٥ \right)$$

$$- \frac{٢}{٥} \text{لو } ٣٥,٩ \;)$$

$$= \frac{١}{٣} \left(١,٧٣٠٠ + ٠,٢٨٥٩ - ٠,٢٦٥٣ \right.$$

$$\left. - ٠,٦٢٢٠ \right) = ٠,٣٧٦٢$$

وعلى هذا فإن $\text{س} = ١٠^{٠,٣٧٦٢} = ٢,٣٧٨$

الباب الثانى
نظرية الفئات والإحتمالات
Theary of sets and probablities
الفصل الأول: نظرية الفئات

تعتبر نظرية الفئات من الموضوعات الاساسية فى الرياضة الحديثة وتطبيقاتها فى مختلف المجالات، حيث يمكن عن طريقها إعاده صياغة الكثير من النظريات والقوانين القديمة فى صوره مبسطه وسهله . ففى مجال الاداره مثلا، غالبا مانشير إلى فئة من المنتجات الصناعية، فئة من العمال فى مصنع معين أو فئه من القرارات البديله المتاحه أمام الجهه المسئوله عن اتخاذ القرار.

تعريف الفئه: DEFINTION OF SET

يمكن تعريف الفئه بأنها مجموعة من الأشياء ، بشرط أن تكون هذه المجموعة معرفة تعريفاً جيداً، ويشار إلى الأشياء المكونة لهذه المجموعة بمفرداتها أو عناصرها.

مثال(١)

إذا عرفت الفئه (س) بأنها فئه الاعداد الفردية مابين ٧،١ وبالتالى يمكن كتابة الفئه س على الصورة التالية:

س={١،٣،٥،٧}

مـثـال(٢)

إذا عرفت الفئه (ص) بأنها اسماء الطلاب الذكور داخل فصل دراسى فإننا نستطيع كتابه عناصر هذه الفئه على النحو التالى:

ص= {ص/ص يكون طالبا فى الفصل}

مـثـال(٣)

إذا عرفنا الفئة (كـ) بأنها فئه النتائج الممكنه فى حاله رمى زهرة نرد مرة واحدة فإننا نستطيع كتابة عناصر هذه الفئه على الصوره الاتية:

كـ = {١،٢،٣،٤،٥،٦}

ومما ينبغى مراعاته عند كتابة عناصر الفئه مايلى:

(أ) تكتب عناصرالفئه بين قوسين على الصوره { } أو [ ]

(ب) عدم تكرار العناصر داخل القوسين.

(جـ) ترتيب العناصر داخل القوسين غير مهم.

(ء) يجب وضع فاصله (،) بين العنصر والعنصر الذى يليه.

(هـ) علامه التساوى الموجودة لاتعنى التساوى المعروفه فى لغه الرياضيات القديمة ولكنها تعنى أن هذه الفئه تحتوى على العناصر المذكوره بين القوسين.

وتجدر الاشاره إلى أنه توجد طريقتين لكتابه عناصر الفئه ، فقد تكتب العناصر عنصرا عنصرا فى شكل قائمه (List)، أو تكتب جمله لغويه تصف بها كل العناصر الموجوده داخل الفئه، فمثلا لو أردنا التعبير عن الفئه (أ)

والتى تحتوى على الارقام الزوجية فانه يمكن التعبير عنها بـإحدى الطريقتيـن الاتيتين

أ = {س/ س تمثل أى رقم زوجى}

أو

أ = {٢،٤،٦،٨،...}

مـثـال(٤)

إذا كان لدينا الفئة (أ$_1$) بحيث أ$_1$ = { ١، ٢، ٣، ٤، .... } فإنه يمكن القول أن:

٣ $\in$ أ$_1$ (١)

ولكن ٥ $\notin$ أ$_1$ (٢)

وهذا يعنى أنه إذا كان العنصر (س) أحد عناصر الفئة أ$_1$ فإنـه يمكـن إستخدام الرمز $\in$ (ينتمى إلى) للتعبير عن ذلك كما فى (١)، أما كان العنصـر (س) ليس عنصرا من عنـاصر الفئـه (أ$_1$) فإنـه يمكـن إسـتخدام الرمـز $\notin$ (لا ينتمى إلى) كم فى (٢).

بعض التعاريف العامة:

لكى نتعرف على مفهوم الفئات بصورة اكثر دقة يجب، أولا توضيـح بعض المفاهيم التى كثيرا ما تستخدم فى هذا المجال مثل:

الفئات المتساوية: Equality of sets

إذا كان لدينا فئتين س، ص وكان كل عنصر فى الفئة س ينتمى أيضاً إلى الفئة ص، فإننا نقول أن الفئة س فئه جزئية (Subset) من الفئة ص وتكتب كما يلى:

س ⊂ ص

وإذا كان كل عنصر فى الفئة ص ينتمى فى نفس الوقت إلى الفئة س، فيمكننا القول بأن الفئة ص فئة جزئية (Subset) من الفئة س وتكتب

ص ⊂ س

أى أنه إذا كان كل عنصر فى س ينتمى إلى ص وأيضاً كل عنصر فى ص ينتمى إلى س، ففى هذه الحالة يمكن القول بأن الفئة س تساوى الفئة ص ويمكن أن تكتب

س = ص

مثال(٥)

إذا كان لدينا الفئتين أ ، ب حيث:

أ = {أ / أ رقم صحيح موجب ≥ ١٠٠}

ب = {ب / ب رقم صحيح موجب ≥ ٥٠}

إذن ب ⊂ أ ولكن أ ⊄ ب

وبالتالى أ ≠ ب

الفئة الخالية Empty set

تعرف الفئة الخالية بأنها الفئة التى لا تحتوى على أى عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ.

مـثـال(٦)

حدد أى من هذه الفئات تمثل فئة خالية:

س = {س / س^{٢} = ٤ ، س رقم فردى}

ص = { ص / ص + ٨ = ٨}

الفئة الأولى تمثل فئة خالية حيث أنها لا تحتوى على أية عناصر، بدليل انه لا يوجد رقم فردى يحقق المعادلة س^{٢} =٤.

أما الفئة الثانية فهى تحتوى على عنصر واحد وهو الصفر وبالتالى لا تعتبر الفئة ص فئة خالية.

التجربة العشوائية Random Experiment

التجربة العشوائية هى التجربة التى يعرف مقدما جميع نواتجها ولكن لا يمكن التنبؤ بنتيجة مسبقة ومحدده لهذه التجربة وايضا ترتيب حدوث هذه النواتج.

مـثـال(٧)

عند القاء قطعة نقود تعرف مقدما انه سوف ينتج من هذه العمله إما الصورة (ص) أو الكتابة (ك) ولكن إذا كررنا التجربة عدد من المرات، هل

يمكن ان نعرف فى كل مره ناتج كل محاولة قبل وقوعها؟ فى الحقيقة اذا كانت العمله متوازنة فإننا لا نستطيع ذلك وبالتالى يمكن القول بأن هذه التجربة عشوائية.

وبالمثل فى تجربة القاء زهره نرد كاملة التوازن مره واحده فان النواتج الممكنة لهذه التجربة هى ظهور اى وجه من الأوجه الستة لزهرة النرد (١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦) ولكن عند أجراء التجربة لايمكن التنبؤ أى هذه النواتج سيتحقق بالفعل.

فراغ العينه Sample space

يعرف فراغ العينه بأنه فئة كل النواتج الممكنة لأى تجربة عشوائية وعاده يرمز لها بالرمز (Ω) .

مثال(٨)

فى الدراسات السكانية يتكون فراغ العينه (Ω) من بيانات خاصة بسكان العالم وبالتالى فإن أى فئة تحتوى على بيانات سكان مدينة معينة تعتبر فئة جزئية من فراغ العينه الخاصة بهذه الدراسات.

مثال(٩)

عند القاء قطعتى نقود كاملة التوازن مرة واحدة تعتبر تجربة عشوائية ويتكون فراغ العينة (Ω) لها من العناصر الأولية وهى :

Ω = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

مثال(١٠)

أيضاً عند القاء زهرتى نرد كاملتى التوازن مرة واحدة تعتبر تجربة عشوائية ويتكون فراغ العينة (Ω) لها من عدد من العناصر الأولية وهى:

Ω = {(١/١) ، (٢/١) ، .... ، (٦/٦)}

الحدث The event

أى فئة جزئية من فراغ العينة تسمى حدثا، وقد يكون الحدث بسيط احتوى على عنصر واحد، فمثلا عند القاء قطعة نقود كاملة التوازن مرة واحدة وكان الحدث أ١ يمثل ظهور الوجه فى هذه التجربة بمعنى أن أ١ = {ص} فعندئذ يمكن القول بأن الحدث أ١ حدث بسيط.

أيضاً قد يكون الحدث مركب إذا احتوى على أكثر من عنصر، وهذا يتضح مثلا عند القاء قطعتين من النقود كاملة التوازن مرة واحدة فيقال الحدث أ٢ والذى يمثل ظهور صورتين بمعنى أ٢ = {ص،ص} حد مركب.

وقد يكون الحدث مؤكد (sure event) إذا كان ذلك الحدث سيحدث بالتأكيد فمثلا لو أخذنا شخص من مدينة الزقازيق بطريقة عشوائية وكنا نبحث عن عمر أقل من ١٥٠ سنة فقطعا سوف يكون الشخص المسحوب كذلك.

كذلك قد يكون الحدث مستحيل (impossible event) وهو الحد الذى لا يتحقق على الاطلاق، والأمثلة على ذلك كثيرة فمثلا لو اخترنا

شخص من مدينة الزقازيق، فما هى فرصة أن يكون عمر ذلك الشخص أكبر من ١٥٠ سنة؟ بالتأكيد ستكون منعدمة.

عمليات الفئات Operations of sets

إذا كانت (Ω) تمثل فراغ العينة الخاصة بتجربة عشوائية ما، فإن هناك عددا من العمليات التى يمكن اجراؤها على المجموعات الجزئية المنتمية إلى هذا الفراغ، وفيما يلى توضيح لبعض هذه العمليات:

اتحاد الفئات Union of sets

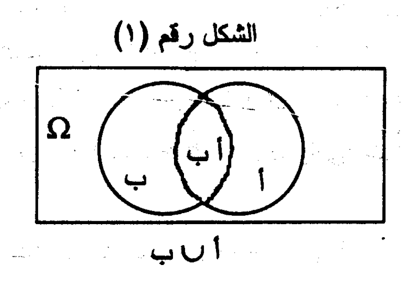
يمكن تعريف الفئة التى تشتمل على مجموعة عناصر الفئة (أ) أو الفئة (ب) أو كليهما، بأنها الفئة الناتجة عن اتحاد الفئتين (أ)، (ب) ويرمز لاتحادهما بالرمز (أ ∪ ب)

ومعنى ذلك أن:

أ ∪ ب = {س / س ∈ أ أو س ∈ ب}

ويمكن توضيح حالة اتحاد الفئتين أ ، ب بالشكل التالى والذى يطلق عليه (venn diagram)

الشكل رقم (١)



أ ∪ ب

حيث توضح المنطقة المظللة بالشكل السابق (الشكل ١) المنطقة التـى يتحقق فيها اتحاد الفئتين أ، ب وبصفه عامة، يمكننا وضع تعريف عام للاتحاد بين الفئات، فلو فرضنـا أنـه لدينـا الفئـات $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$، ... ، $أ_ن$ فـإن اتحـاد هذه الفئات يمكن صياغته رياضيا على النحو التالى:

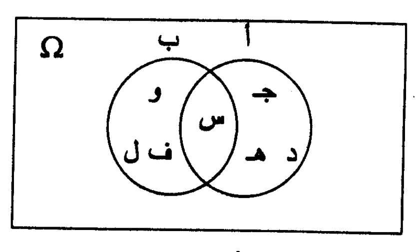
$$أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ \cup .... \cup أ_ن = \bigcup_{ر=١}^{ن} أ_ر$$

مـثـال(١١)

بفرض أنه لدينا الفئتين أ ، ب حيث

أ = {جـ ، د ، س ، هـ} ،

ب = {و ، س ، ف ، ل} فإن:



أ ∪ ب

وبصفة عامة وبالنسبة لأى فئة جزئية ولتكن الفئة (أ) مثلا فإنه ينبغى ملاحظة أن:

١- أ ∪ أ = أ

٢- أ ∪ Ω = Ω

٣- أ ∪ ϕ = أ

٤- $\Omega \cup \phi = \Omega$

تقاطع المجموعات Intersection of sets

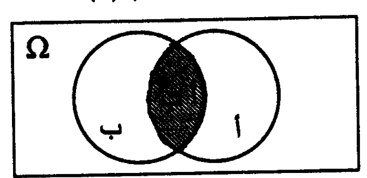
يمكن تعريف الفئة التى تشتمل على مجموعة العناصر المنتمية إلى كل الفئتين أ ، ب بأنها فئة تقاطع الفئتين أ ، ب.

ويرمز لتقاطع الفئتين أ ، ب بالرمز أ ∩ ب ، ويمكن صياغة التقاطع بين الفئتين أ ، ب على النحو التالى:

أ ∩ ب = {س / س ∈ أ ، س ∈ ب}

كما يمكن توضيح هذا التقاطع بشكل يطلق عليه (Venn diagram) كما فى الشكل رقم (٢) التالى:

الشكل رقم (٢)



حيث توضح المنطقة المظلله بالشكل السابق المنطقة التى سوف يتحقق فيها تقاطع الفئتين أ ، ب وبصفة عامة، يمكننا وضع تعريف عام للتقاطع بين الفئات، فلو فرضنا أنه لدينا الفئات $أ_1$ ، $أ_2$ ، .... $أ_ن$ ، فإن تقاطع هذه الفئات يمكن صياغته رياضيا على النحو التالى:

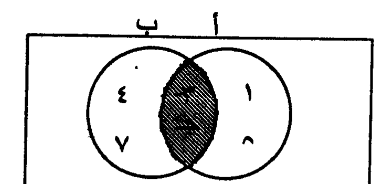
$$\text{أ}_{١} \cap \text{، أ}_{٢} \cap \text{، أ}_{٣} \cap \text{، ...... أ}_{ن} = \bigcap_{ر=١}^{ن} \text{أ}_{ر}$$

مـثـال(١٣)

أوجد تقاطع الفئتين أ ، ب حيث

أ = {١ ، ٣ ، ٥ ، جـ}

ب = {٣ ، ٤ ، جـ ، ٧}



فإن

أ ∩ ب = {٣ ، جـ}

ولو فرضنا أن لدينا فئة أخرى هى ك = {٢ ، ٤ ، ٩ ، د}

فإن

أ ∩ ك = { } أو ϕ ، ب ∩ ك = { ٤ }

وبصفه عامة إذا كان تقـاطع أى فئتين مساويا { } أو ϕ فإنـه يمكـن القول بأن هاتين الفئتين متباعدتين (Disjoint sets).

وبصفـه عامـة وبالنسبة لأى فئـة جزئيـة ولتكـن الفئـة (أ) مثـلا، فإنـه ينبغى ملاحظة أن:

١- أ ∩ أ = أ

٢- أ ∩ ϕ = ϕ

٣- أ ∩ ϕ = أ

٤- Ω ∩ ϕ = ϕ

من العرض السابق يلاحظ أن هناك بعض القوانين المترتبة على تعريف كل من الاتحاد والتقاطع والتى يمكن اثباتها رياضيا أو بإستخدام (Venn diagram) والتى من أهمها:

(١) أ ∪ (ب ∪ جـ) = (أ ∪ ب) ∪ جـ = (أ ∪ جـ) ∪ ب.

(٢) أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ = (أ ∩ جـ) ∩ ب.

(٣) أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ).

(٤) أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ).

الفرق بين الفئات Diffreence between setes

يمكن تقسيم الفرق بين أى فئتين إلى ثلاثة أنواع:

لو فرضنا أنه لدينا الفئتين أ ، ب والتى تمثل فئات جزئية من فراغ العينة Ω.

فإنه يمكن صياغة الأنواع الثلاثة للفرق بين الفئتين أ ، ب رياضيا على النحو التالى:

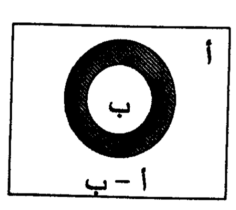
(١) إذا كان ب ⊂ أ فإن أ − ب = {س / س ∈ أ ، س ∉ ب}

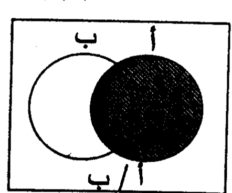
(٢) إذا كان أ ⊄ ب فإن أ / ب = {س / س ∈ أ ، س ∉ أ ∩ ب}

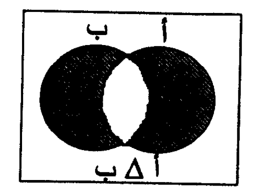
(٣) إذا كان أ ⊄ ب فإن أ Δ ب = {س / س ∈ أ ∪ ب ، س ∉ أ ∩ ب}

ويمكن تمثيل هذه الحالات الثلاثة بالرسم كما هو موضح بالشكل رقم (٣)

شكل رقم (٣)







مـثـال(١٣)

إذا كان لدينا الفئات أ ، ب ، جـ حيث:

أ = { ٢، ٣ ، ٤ ، ٥}

ب = { ٢ ، ٣}

جـ = {٢ ، ٨ ، ٩}

فإن

أ - ب = {٤ ، ٥}

أ / جـ = {٣ ، ٤ ، ٥}

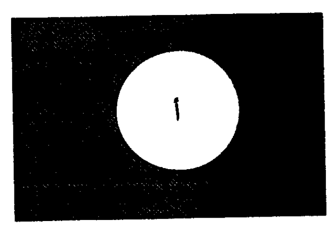
أ Δ جـ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩}

وتجدر الاشارة إلى أنه يمكن اعتبار الفئة المكملة (Complementary set) كحالة خاصة من حالات الفرق بين الفئات، حيث يمكن تعريفها بأنها الفئة المشتملة على جميع العناصر الغير موجودة فى الفئة (أ) وموجودة بفراغ العينة (Ω) ويرمز لها بالرمز $\bar{أ}$ ويمكن صياغة ذلك رياضيا على النحو التالى:

آ = {س / س ∈ Ω ، س ∉ أ }

كما يمكن توضيح ذلك بإستخدام (Venn Diagram) كما يلى:

شكل رقم (٤)



آ

يلاحظ من التعريف الرياضى وكذلك الشكل البيانى السابق للفئة المكلمة آ أن:

١- أ ∪ آ = Ω

٢- أ ∩ آ = ϕ

٣- $\overline{\Omega} = \phi$

٤- $\overline{\phi} = \Omega$

مثال(١٤)

إذا كانت فئة فراغ العينة تأخذ الصور التالية:

Ω = {س: س : ١ ، ٢ ، ... ، ١٠}

فإذا أمكن تعريف الفئات الجزئية أ ، ب ، جـ فى الصورة التالية:

أ = {س: س = ١ ، ٢ ، ٣}

ب = {س: س = ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

جـ = {س: س = ١ ، ٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

فأوجد:

١- أ ∪ ب ، أ ∪ جـ ، أ ∪ ب ∪ جـ

٢- أ ∩ ب ، أ ∩ جـ ، أ ∩ ب ∩ جـ

٣- $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$

٤- أوجد $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ وأيضاً $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ ثم علق على الناتج.

الحل:

١- أ ∪ ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

أ ∪ جـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

أ ∪ ب ∪ جـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

٢- أ ∩ ب = {٢}

أ ∩ جـ = {١}

أ ∩ ب ∩ جـ = {} أو φ

٣- $\overline{\text{أ}}$ = Ω - أ = {٤ ، ٥ ، .... ، ١٠}

$\overline{\text{ب}}$ = Ω - ب = {١ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

$\overline{\text{جـ}}$ = Ω - جـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

٤- الطرف الأيمن = $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ = Ω - (أ ∪ ب) = {٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

الطرف الأيسر = $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ = {٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

∴ $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ = $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$

وبصفه عامة فإن:

مكمل اتحاد عدة فئات تساوى تقاطع مكملات هذه الفئات

الفصل الثانى: الإحتمالات

تحتل نظرية الإحتمالات شأنا كبيرا بين الدراسات الرياضية، لما لها من إستخدامات تطبيقية فى كافة مجالات حياتنا اليومية، خصوصا فى مجال اتخاذ القرارات فى النواحى الإدارية والإقتصادية، كما أن أسلوب التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد كثيرا على الأسس النظرية والاحصائية لتحديد التوقع.

أيضاً فإن رياضيات التأمين على الحياة، والتى تتعلق بتحديد الأقساط سواء أكانت وحيدة أو سنوية صافية أو تجارية، إنما تعتمد أساسا على الأسلوب الاحصائى لفكرة الإحتمال. وهذه النظرية ليست حديثة العهد بالإستخدام، فلقد بدأ التفكير فى إستخدام مبادئها منذ ثلاث قرون خصوصاً فى مجال الألعاب، وتطور إستخدامها إلى أن وصلت إلى شكلها الراهن، نظرية لها أصول وقواعد وقوانين، وأصبحت من الفروع الأساسية فى العلوم الرياضية.

فبصفة عامة يكون استعمالنا لكلمة إحتمال عندما نريد أن نصل إلى حكم أو قرار بخصوص موقف معين سيترتب عليه بعض النتائج الغير مؤكده، وبذلك يرتبط لفظ إحتمال بالتكهن بنتائج غير مؤكده الوقوع، فرجل الأعمال مثلا من الممكن أن يقرر بناءً على خبرته السابقة أن الفرصة قد تكون مواتيه الآن لظهور منتج معين وأنه سوف يحقق نجاحا معين فى سوق المستهلك، ويكون السؤال المطروح ما هو إحتمال نجاح هذا المنتج، بل قد

يذهب إلى ما هو أبعد من ذلك، كأن يحاول أن يتعرف على رقم يمثل مقدار هذا النجاح.

وبصفه عامه يمكن القول بأن نظرية الإحتمالات تقدم قيما رقمية لتوقعاتنا الغير مؤكده، فهى تقدم القانون الرياضى الذى يساعدنا على التنبؤ بالنتائج الغير مؤكده، فمثلا فى حالة السلعة المقرر طرحها فى الأسواق، نستطيع عن طريق نظرية الإحتمالات أن نتنبأ هل نجاح السلعه سوف ويكون أكيد أو سوف يقترب من التأكد أو سوف يكون ضعيفا، ويتم ذلك بمساعدة بعض الأرقام التى تحسب طبقا لفروض نظرية معينه.

وهناك أكثر من مدخل لدراسة نظرية الإحتمالات وأبسط هذه المداخل هو أن نتعرف على بعض التعاريف، ومن خلال هذه التعاريف يبرر تعريف الإحتمالات وكيفية حسابه.

المفهوم الرياضى للإحتمال (Mathematical probabilityes)

غالبا ما يكون فى الامكان افتراض وقوع حادث معين بدرجة ثقة معينة (تقريبية)، ففى ظل توافر المعلومات عن ظاهرة ما، ماضيها وحاضرها والقليل عن اتجاهها المستقبلى، يمكن لأحد المديرين اتخاذ قرار يتعلق بالعمليه الانتاجية وافتراض قيمة إحتمالية لوقوع أحد الحوادث والتى يعتمد عليها فى صنع القرار.

غير أن هذا الأسلوب فى تحديد قيمه معينه (تقديرية) لإحتمال وقوع الحادث ربما تكون بعيدة عن الناحية الموضوعية وقد تعتمد وتختلف من

شخص لآخر. لذلك فإنه في معظم المحاولات والتي يمكن تحديد نتائجها مسبقا دون ما الحاجة إلى اجراء التجربة والتي تعتمد في اجراءها على عوامل العشوائية والصدفه حيث يجب ألا نعتمد على الأسلوب التحكمي في إيجاد إحتمالات وقوع الحوادث بل لابد من إستخدام أسلوب رياضي في حساب التوقع.

فعند القاء زهرة نرد متزنة فإن النتائج الأولية الممكنة (حتى إذا لم يتم إلقاء زهرة النرد) والتي سبق تعريفها بفراغ العينة (Ω) هي:

Ω = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

فإذا ما كان الحادث الذي نحن بصدده هو الحصول على الرقم (٢) أو الرقم (٣)، في هذه الحالة فإن مكونات الحادث عباره عن مجموعة جزئية تحتوي على عنصرين فقط، على ذلك فإن:

$$\text{إحتمال الحصول على (٢ ، ٣)} = \frac{\text{عناصر الحادث}}{\text{فراغ العينه}}$$

فإذا أعطينا الرمز (أ) تعبيرا عن الحادث والرمز (ح) للتعبير عن الاحتمال فإن كلمة [ح (أ)] تعني إحتمال الحصول على الحادث (أ) ، وباعطاء الرمز (م) للتعبير عن عدد عناصر الحادث (المجموعة الجزئية) والرمز (ن) للتعبير عن عدد عناصر فراغ العينة (Ω) فإن:

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث (أ)}}{\text{عدد عناصر فراغ العينه } (\Omega)} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

مثال آخر على حدوث الصدفه والتى يمكن حساب إحتمال وقوعها دون ما حاجة إلى اجراء التجربة فى حد ذاتها. فلو افترضنا القاء قطعة نقود متزنة مرة واحدة، فإن فراغ العينه يحتوى على صوره وكتابه.

أى أن فراغ العينه (Ω) = {ص ، ك} وبالتالى فإن

إحتمال الحصول على صوره = $\frac{١}{٢}$

وأيضاً احتمال الحصول على كتابه = $\frac{١}{٢}$

هنا نجد أن عوامل الصدفه والعشوائية هى التى تحدد لنا النتائج الأولية الممكنة وأيضاً العناصر الداخلة فى تكوين الحادث ويمكن فى ظل ذلك حساب الإحتمال دون اجراء تجارب وتسهيل للمشاهدات ويعرف الإحتمال المحسوب فى هذه الحالة بالإحتمال الرياضى. وهى ما تسمى أيضاً بالإحتمال القبلى (أى الإحتمال المحسوب قبل إجراء التجربة) Priori probabilities.

المفهوم الاحصائى للإحتمال (statistical probability)

فى كثير من الأحيان قد تكون بصدد حوادث يراد إيجاد إحتمال وقوعها، غير أن عناصرها ونتائجها الأوليه لا يمكن حسابها بطريقة نظرية بل لابد من إجراء المحاولات وتسجيل المشاهدات عن التجارب موضع الدراسة، ومن ثم استنتاج الإحتمال بعد ذلك، ومن هنا سميت بالإحتمالات البعيدية أو الإحتمالات التجريبية (Emperical probabilities).

فقد يكون من الأفضل إجراء عدد كبير من المحاولات للوصول إلى نتائج دقيقه للإحتمال مع عدم تغيير الظروف المحيطه باجراء التجارب حتى لا تدخل متغيرات جديدة قد تؤدى إلى تغيير ملحوظ فى النتائج.

ومن أمثلة ذلك أن يقوم شخص بالقاء زهرة نرد على سطح أملس عدة آلاف من المرات ويقوم باحصاء الأرقام التى تدخل فى تكوين حادث معين (وليكن الرقم ٥) ثم يقوم بحساب الإحتمال على أساس قسمة عدد مرات ظهور الرقم (٥) على عدد المحاولات الكلية.

فإذا حصلنا على الرقم (٥) حوالى ٥١٧ مرة من محاولة القاء زهرة النرد حوالى ٣٠٠٠ مرة فإن

ح (الحصول على الرقم ٥) = $\frac{٥١٧}{٣٠٠٠}$ ٠,١٧ تقريباً

وهذه النتيجة تعبتر قريبة جدا من ($\frac{١}{٦}$) وهى نفس النتيجة المتوقع الحصول عليها لإحتمال ظهور الرقم ٥ عن القاء زهرة نرد مرة واحدة.

أيضاً إذا كان عدد المواليد المسجلة مثلا عن فترة سابقة حوالى ٢٠٠٠ مولود منهم ٩٠٠ مولود (ذكر) فإن:

إحتمال ولاده مولود (ذكر) فى أحد الأسر = $\frac{٩٠٠}{٢٠٠٠}$ = ٠,٤٥

وبالتالى فإن:

إحتمال كون المولود (أنثى) = $\frac{١١٠٠}{٢٠٠٠}$ = ٠,٥٥

وعموما إذا قمنا بإجراء أى تجربة عشوائية بعدد ليس كبيرا فإن النتائج لن تكون دقيقه بالقدر المطمئن ولابد من اجراءها عدداً كبيراً جداً من المرات.

وعلى ذلك فإن: التعريف الحديث للإحتمال ما هو إلا نهاية التكرار النسبى عندما تكثر عدد المشاهدات إلى ما لا نهاية وعليه فإن:

$$ح\ (أ) = \lim_{ن \to \infty} \frac{م}{ن}$$

وتجدر الاشارة إلى إحتمال حدوث أى حدث يتمتع ببعض الخصائص منها ما يلى:

(١) ١ ≤ ح (أ) ≤ صفر

بمعنى أن قيمة ح (أ) دائما قيمة موجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح.

(٢) ح (Ω) = ١

بمعنى أن قيمة إحتمال فراغ العينة (النتائج الكلية الممكنة) دائما سوى الواحد الصحيح.

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فى فراغ العينه (Ω) فإن:

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

كما يمكن الاستفادة بالخصائص السابقة للإحتمال فى اثبات عدد من النظريات كما يلى:

نظرية (١):

إذا كانت الفئة ϕ تشير إلى الفئة الخالية، فإن:

ح (ϕ) = صفر

الاثبات:

نفرض أن الفئة (أ) فئة جزئية فى فراغ العينه Ω وحيث أن

أ = أ $\cup$ ϕ = أ

لذلك فإن، ح (أ $\cup$ ϕ) = ح (أ)

وحيث أن الفئتين أ، ϕ فئتان متنافيتان لذلك

ح (أ $\cup$ ϕ) = ح (أ) + ح (ϕ) = ح (أ)

$\therefore$ ح (ϕ) = صفر

نظرية (٣):

إذا كان الحدث ($\overline{\text{أ}}$) هو الحدث المكمل للحدث (أ) فغن :

ح ($\overline{\text{أ}}$) = ١-ح(أ)

الأثبات:

يمكن تجزئة فراغ العينة (Ω) الى الحدثين أ، $\overline{\text{أ}}$ وهذا يعنى أن :

ف= أ $\cup$ $\overline{\text{أ}}$

$\therefore$ ح (ف) = ح (أ) +ح($\overline{\text{أ}}$) ومن الخاصية الثانية نجد أن :

١= ح (أ) +ح($\overline{\text{أ}}$)

$\therefore$ ح($\overline{\text{أ}}$) =١ - ح (أ)

نظرية (٣):

إذا كانت $أ_١$ فئة جزئية من الفئة $أ_٢$ أى أن $(أ_١ \subset أ_٢)$ فإن:

$$ح(أ_١) \leq ح(أ_٢)$$

الأثبات :

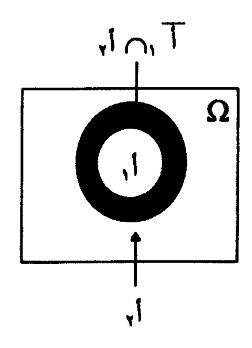
$$أ_٢ = أ_١ \cup (\overline{أ}_١ \cap أ_٢)$$

وحيث أن الحدثين $أ_١$ ، $(\overline{أ}_١ \cap أ_٢)$ حدثين متنافيين لذلك فان :

$$ح(أ_٢) = ح(أ_١) + ح(\overline{أ}_١ \cap أ_٢) \leq ح(أ_١)$$

وذلك لأن:

$$ح(\overline{أ}_١ \cap أ_٢) \leq صفر$$



نظرية (٤):

لاى حدث (أ) فى فراغ العينة (Ω)

$$صفر \leq ح(أ) \leq ١$$

الأثبات

$$\phi \subset أ \subset \Omega$$

فإن ح (ϕ) ≤ ح (أ) ≤ ح(Ω)

وحيث أنه من الثابت أن ح (ϕ)= صفر ، ح(Ω)=١

∴ صفر ≤ ح (أ) ≤ ١.

بعض القواعد الاساسية فى نظرية الإحتمالات:

أولا: قانون الجمع للإحتمالات probability Rule of Addition

عن مناقشة قانون جمع الإحتمالات لابد أولا من تحديد ما إذا كانت الأحداث المراد جمع إحتمالاتها أحداث متنافية أم أنها أحداث مشتركة (غير متنافية). لذا يكون من الأفضل التعرف على طبيعة هذه الأحداث.

الأحداث المتنافية (المانعه) The Mutually Exclusive Events

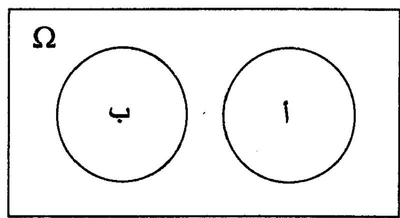
يقال على حدثين أنهما متنافيين أو مانعتين إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر، بمعنى إستحالة حدوثهما معاً. فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود متوازنة، فإنه حدث ظهور الصوره يمنع حدث ظهور الكتابة وبالتالى يمكن القول بأن حدثى ظهور الصوره أوالكتابه فى العمله تعتبر من الأحداث المتنافيه أو المانعه،حيث أنه لا يوجد وجه ثالث للعمله يحمل الصوره والكتابه معاً.

فإذا كان أ، ب حدثين متنافيين فى فراغ عينه واحد ، فإن

ح (أ أو ب) = ح(أ ∪ ب) = ح (أ) + ح(ب)

والشكل الآتى يوضح طبيعة الحدثين المتنافين أ، ب

وبصفة عامة إذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ....،$أ_ن$ أحداث متنافية فى فراغ عينه معينه فإن:



$$ح(أ_١ \text{ أو } أ_٢ \text{ .... أو } أ_ن) = ح(أ_١ \cup أ_٢ \text{ .... } \cup أ_ن) = \sum_{ر=١}^{ن} ح(أ_ر)$$

أمثله متنوعة على جمع إحتمالات الأحداث المتنافية

مـثـال(١)

سحبت ورقـة مـن مجموعـة أوراق اللعب . أوجـد إحتمـال أن تكـون الورقة المسحوبة صوره أو تحمل الرقم ١٠.

الحل:

تعلم أن عدد عناصر فراغ العينـة لتجربـه سـحب ورقـه مـن أوراق اللعب =٥٢ عنصر وحيث أن الكوتشينه تحتوى على ١٢ ورقه صوره (بنـت وشايب وولد) وأيضـا ٤ ورقـات تحمـل الرقـم ١٠ وحيـث أن هـذان الحدثـان متنافيين.

∴ ح(ظهور صوره أو الرقم ١٠) =ح (ظهور صوره) + ح (الرقم ١٠) .

$$= \frac{١٢}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} = \frac{١٦}{٥٢}$$

مـثـال(٢)

فى المثال السابق، أوجد إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة إما ولد أو رقم ١٠ أو من اللون الأحمر .

الحل:

نفرض أن $أ_١$ يمثل الحصول على ولد ∴ ح ($أ_١$) = $\frac{٤}{٥٢}$

نفرض أن $أ_٢$ يمثل الحصول على رقم١٠ ∴ ح ($أ_٢$) = $\frac{٤}{٥٢}$

نفرض أن $أ_٣$ يمثل الحصول على اللون الاحمر ∴ ح $(أ_٣) = \frac{٤}{٥٢}$

∴ ح $(أ_١$ أو $أ_٢$ أو $أ_٣)$ = ح$(أ_١)$ + ح$(أ_٢)$ + ح$(أ_٣)$

$$= \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} + \frac{٢٦}{٥٢} = \frac{٣٤}{٥٢}$$

مــثــال(٣)

كيس به عشرة كرات بيضـاء وخمسـة عشـر سـوداء وعشـرة كـرات حمراء سحبت كره من هذا الكيس بطريقة عشوائية. ما هو إحتمـال أن تكـون بيضاء أو سوداء.

الحل:

فراغ العينه فى هذه التجربـة (سـحب كـره مـن كيـس) يحتـوى علـى خمسه وثلاثون عنصرا .

نفرض أن $أ_١$ تمثل الحصول على كره بيضاء ∴ ح$(أ_١) = \frac{١٠}{٣٥}$

نفرض أن $أ_٢$ تمثل الحصول على كره سوداء ∴ ح$(أ_٢) = \frac{١٥}{٣٥}$

∴ ح$(أ_١$ أو $أ_٢)$ = ح$(أ_١)$ + ح$(أ_٢)$

$$= \frac{١٠}{٣٥} + \frac{١٥}{٣٥} = \frac{٢٥}{٣٥}$$

مــثــال(٤)

وجد أن إنتاج أحد المصانع يحتوى على التشكيلة الإنتاجية التالية:

٢٠٠ وحده إنتاجيه تامه الصنع.

١٠٠ وحده إنتاجيه تحت التشغيل.

٥٠ وحده إنتاجيه تحت التشطيب .

فـاذا قـام أحـد مهندسـى الإنتـاج بسـحب وحـدة إنتاجيـة مـن التشــكيلة الإنتاجية بطريقة عشوائية، أوجد:

أ- إحتمال كونها تامة الصنع أو تحت التشغيل

ب- إحتمال كونها تامة الصنع أو تحت التشطيب

جـ- إحتمال كونها تحت التشغيل أو تحت التشطيب

الحل:

فراغ العينة هنا هو عدد عناصر التشكيلة كلها = ٣٥٠ عنصر ونظرا لأن حصولنا على وحدة انتاجية تامة الصنع يمنـع حصولنـا علـى أى وحـدات من نوع آخر، فإننا بصدد حوادث متنافية الظهور، وبالتالى:

نفرض أن $أ_١$ يمثل الحصول على وحده تامة الصنع = ∴ ح ($أ_١$) = $\frac{٢٠٠}{٣٥٠}$

نفرض أن $أ_٢$ يمثل الحصول على وحده تحت التشغيل =∴ ح ($أ_٢$) = $\frac{١٠٠}{٣٥٠}$

نفرض أن $أ_٣$ يمثل الحصول على وحده تامة الصنع = ∴ ح ($أ_٣$) = $\frac{٥٠}{٣٥٠}$

أ- ح ($أ_{١}$ أو $أ_{٢}$) = ح ($أ_{١}$) + ح ($أ_{٢}$) = $\frac{٢٠٠}{٣٥٠} + \frac{١٠٠}{٣٥٠} = \frac{٣٠٠}{٣٥٠}$

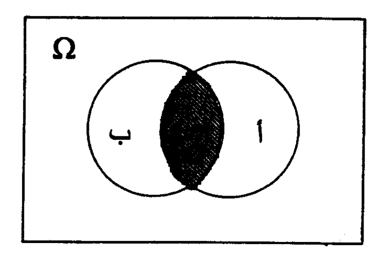
ب- ح ($أ_{١}$ أو $أ_{٣}$) = ح ($أ_{١}$) + ح ($أ_{٣}$) = $\frac{٢٠٠}{٣٥٠} + \frac{٥٠}{٣٥٠} = \frac{٢٥٠}{٣٥٠}$

جـ- ح ($أ_{٢}$ أو $أ_{٣}$) = ح ($أ_{٢}$) + ح ($أ_{٣}$) = $\frac{١٠٠}{٣٥٠} + \frac{٥٠}{٣٥٠} = \frac{١٥٠}{٣٥٠}$

الأحداث المشتركة (الغير متنافية) Jointly Events

بفرض أنه لدينا الحدثين أ ، ب يقال أنهما حدثان متنافيان ومشتركان فى نفس الوقت إذا أمكن حدوث الحدث أ بمفرده أو حدوث ب بمفرده أو حدوثهما معا وفى نفس الوقت. ويأخذ قانون جمع إحتمالات الحدثين المشتركين أ ، ب الصيغة التالية:

ح (أ أو ب) = ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)



وعاده ما يطلق على القانون السابق اسم قانون الجمع لحدثين غير متنافيين، ويلاح فى حالـه الأحداث المتنافية أن أ ∩ ب = ϕ وبالتالى فإن (أ ∩ ب) = صفر، مما يدعونا إلى القول بأن قانون جمع الإحتمالات

للأحداث المتنافية يمثـل حالـه خاصـة مـن قـانون جمـع الإحتمـالات للأحـداث المشتركة.

أما فى حالة وجود ثلاث أحداث مشتركة (أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$) مثلا فإن:

ح (أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$) = ح (أ$_1$) + ح (أ$_2$) + ح (أ$_3$) − ح (أ$_1$ $\cap$ أ$_2$)

− ح (أ$_1$ $\cap$ أ$_3$) − ح (أ$_2$ $\cap$ أ$_3$) + ح (أ$_1$ $\cap$ أ$_2$ $\cap$ أ$_3$)

مـثـال(٥)

ألقيت زهرة نرد متوازنة، ما هو إحتمال الحصول على رقم فردى أو أكبر من ٤ ؟

الحل:

فراغ العينه هنا يحتوى على ٦ عناصر والتى تمثل الاوجه (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) لزهرة النرد.

بفرض أن $أ_١$ يمثل الحصول على رقم فردى (١، ٣، ٥) ∴ ح ($أ_١$) = $\frac{٣}{٦}$

،بفرض أن $أ_٢$ يمثل الحصول على رقم أكبر من ٤(٥، ٦) ∴ح ($أ_٢$) = $\frac{٢}{٦}$

يلاحظ أن الحدثان $أ_١$، $أ_٢$ حدثان مشتركان، بدليل أنه يمكن الحصول على رقم فردى وفي نفس الوقت أكبر من ٤ ، أى يمكن الحصول على حدث أخر يمثل الحدثين $أ_١$، $أ_٢$ وهو الوجه الذى يحمل الرقم (٥).

∴ ح ($أ_١ \cap أ_٢$) = $\frac{١}{٦}$

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) − ح ($أ_١ \cap أ_٢$)

$= \frac{٣}{٦} + \frac{٢}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦}$

مـثـال(٦)

لدراسة العلاقة بين التعليم والتدخين أخذت عينه عشوائية من خمسة وعشرون شخصا وكانت نتائجها كالتالى:

تعليم / تدخين	متعلم	غير متعلم	مجموع
مدخن	٥	٧	١٢
غير مدخن	٤	٩	١٣
مجموع	٩	١٦	٢٥

سحب شخص منهم بطريقة عشوائية، ما هو إحتمال

(أ) أن يكون الشخص المسحوب متعلم ومدخن.

(ب) أن يكون الشخص المسحوب متعلم أو مدخن.

الحل:

فراغ العينة فى هذه الحالة يحتوى على ٢٥ عنصر.

نفرض أن الحدث أ يمثل الحصول على شخص متعلم ∴ ح (أ) = $\frac{٩}{٢٥}$

،نفرض أن الحدث ب يمثل الحصول على شخص مدخن ∴ح (ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$

واضح أن التعليم والتدخين أحداث مشتركة (غير متنافية) بدليل ظهور حدث أخر يجمع بين ظاهرة التعليم وظاهرة التدخين وهو ما نشير إليه بالرمز (أ و ب) وبه ٥ عناصر، بمعنى وجود خمسة أشخاص فى العينة متعلمين ومدخنين فى نفس الوقت.

أ- ح (أ و ب) = $\frac{٥}{٢٥}$

ب- ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

= $\frac{٩}{٢٥}$ + $\frac{١٢}{٢٥}$ - $\frac{٥}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

مثال(٧)

بين إنتاج ١٠٠٠ وحده إنتاجية من إنتاج أحد المصانع وجد ما يلى:

١٠ وحدات بها عيوب تصنيع.

٧ وحدات بها عيوب تشطيب.

٣ وحدات بها عيوب تصنيع وتشطيب معا.

فعند سحب وحدة واحدة من هذا الإنتاج بطريقة عشوائية. ما هو إحتمال كونها وحده إنتاجية بها عيوب تصنيع أو تشطيب.

الحل:

فراغ العينة فى هذه الحالة يحتوى على ١٠٠٠ عنصر.

نفرض أن الحدث أ يمثل الحصول على وحده بها عيوب تصنيع

∴ ح (أ) = $\frac{١٠}{١٠٠٠}$

، نفرض أن الحدث ب يمثل الحصول على وحده بها عيوب تشطيب

∴ ح (ب) = $\frac{٧}{١٠٠٠}$

واضح وجود حدث أخر يمثل العناصر المشتركة بين الحدثين أ ، ب ويحتوى على ٣ عناصر (وحدات) بها عيوب تصنيع وتشطيب فى نفس الوقت

$\therefore$ ح (أ و ب) = $\frac{٣}{١٠٠٠}$

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ، ب)

= $\frac{١٠}{١٠٠٠}$ + $\frac{٧}{١٠٠٠}$ - $\frac{٣}{١٠٠٠}$ = $\frac{١٤}{١٠٠٠}$

مـثـال(٨)

سجل أحد الباحثين الاجتماعيين البيانات التالية من احدى دور رعاية النشئ فى ج. م. ع.

العمر بالسنة	أقل من ١٠	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥ فأكثر	المجموع
العدد	١٠٠	١١٠	١٥٠	٣٠٠	١٩٠	١١٠	١٠	١٠٠٠

المطلوب: حساب الإحتمالات التالية:

أ- وجود طفل عمره إحدى عشر سنه.

ب- وجود طفل عمره عشر سنوات فأقل.

جـ- وجود طفل عمره يزيد عن أربع عشر سنه.

الحل:

فراغ العينه فى هذه التجربة يحتوى على ١٠٠٠ عنصر.

نفرض أن الرمز (س) يشير إلى فئه العمر، وعلى ذلك فإننا نضع الصيغ التالية لايجاد المطلوب.

أ- تعنى ح (س = ١١) = $\frac{١٥٠}{١٠٠٠}$ = ٠,١٥

ب- تعنى ح (س ≥ ١٠) = $\frac{١٤٠}{١٠٠٠}$ + $\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$ = $\frac{٢٤٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٢٤

جـ- تعنى ح (١٢ ≥ س ≥ ١٤) = ح (س = ١٢) + ح (س = ١٣)
+ ح (س = ١٤)

= $\frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$ + $\frac{١٩٠}{١٠٠٠}$ + $\frac{١١٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٦

د- تعنى ح (س > ١٤) = ح (س = ١٥ فأكثر) = $\frac{١٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٠١

ثانيا:قانون الضرب للإحتمالات Probability rule of multiplication

أيضاً عند مناقشة قانون ضرب الإحتمالات، لابد أولاً من تحديد ما إذا كانت الأحداث المطلوب ضرب إحتمالاتها أحداث مستقله أم غير مستقله، فضلا عن التعرف على طبيعة هذه الأحداث.

الأحداث المستقلة The independent Events

يعتبر الحادثان (أ ، ب) حادثان مستقلان إذا كان وقوع الحادث (أ) لا يؤثر إطلاقاً على وقوع الحادث (ب)، فضلاً عن عدم تأثره به أيضاً فمثلاً عند سحب كرتين من كيس به مجموعه من الكرات البيضاء والسوداء، فإذا كان السحب بارجاع يتم سحب الكره الأولى ويتم حساب الإحتمال ثم نعيد

الكره إلى الكيس مرة أخرى ثم يعاد سحب كـره ثانيـة وحسـاب الإحتمـال فـى المحاوله الثانية وهكذا. واضح أن قيمة الإحتمال فـى السـحبه الثانيـة لا يتـأثر مطلقا بما يظهر فى السحبة الأولى، بمعنى أن فراغ العينه للتجربـة العشـوائية يكون دائماً ثابت ولا يتغير.

وعلى هذا يمكننا القول بأنه إذا كـان لدينـا الحـادثين أ ، ب المسـتقلين فإن إحتمـال حدوثهمـا معـاً يسـاوى إحتمـال حـدوث الحـدث (أ) مضروبـا فـى إحتمال حدوث الحادث (ب) وأى أن:

$$ح\ (أ \cap ب) = ح\ (أ) \times ح\ (ب)$$

وبصفة عامه إذا كانت الأحداث $أ_{١}$، $أ_{٢}$ ، ..... $أ_{ن}$ تمثل مجموعـه مـن الأحداث المستقلة فإن:

$$ح\ (أ_{١} \cap أ_{٢} \cap \ldots \cap أ_{ن}) = ح\ (أ_{١}) \times ح\ (أ_{٢}) \times \ldots \times ح\ (أ_{ن})$$

وعلى العكس مـن ذلـك إذا كـان إحتمـال حـدوث الحدثيـن أ ، ب معـاً يسـاوى حـاصل ضـرب إحتمـال حـدوث الحـدث (أ) وإحتمـال حـدوث الحـدث (ب)، فى هذه الحاله يمكننا إستنتاج أن الحادثين (أ ، ب) حادثين مستقلين.

مـثـال(٩)

يقوم أحد الأشخاص بالقاء قطعة نقود متزنة مرتين، فمـا هـو إحتمـال الحصول على الصوره فى كل مرة (أى أوجد ح (ص و ص)).

الحل:

الأحداث هنا تعتبر أحـداث مستقله حيث أن نتـائج الرميه الأولـى لا تؤثر فى نتائج الرميه الثانية وعليه فإن:

$$ح\ (\text{الحصول على الصورة فى المرة الأولى}) = \frac{١}{٢}$$

، $$ح\ (\text{الحصول على الصورة فى المرة الثانية}) = \frac{١}{٢}$$

وعلى ذلك فإن:

$$ح\ (ص \text{ و } ص) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$$

مـثـال(١٠)

صندوق يحتوى على ١٠ مصابيح كهربائية منها ٧ صالحه للإضـاءة و٣ غير صالحة للإضاءة، قام أحد الأشخاص بسحب مصباحين عشوائياً من الصندوق مع إرجاع المصباح الأول إلى الصندوق فالمطلوب:

أ- إيجاد إحتمال كونهما صالحين للإضاءة.

ب- إيجاد إحتمال كونهما غير صالحين للإضاءة.

جـ - إيجاد إحتمال أن أحدهما غير صالح للإضاءة والآخر صالح للإضاءة.

الحل:

يلاحظ فى هذه التجربة أن فراغ العينة يحتوى على ١٠ عناصر وأن الحوادث هنا مستقلة، حيث إحتمال وقوع الأول لا يؤثر فى إحتمال وقوع الآخر، وعلى ذلك فإن:

(أ) إحتمال كونهما صالحين للاضاءة

= ح (الأول صالح للاضاءة) × ح (الثانى صالح للاضاءة)

$$= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٧}{١٠} = \frac{٤٩}{١٠٠} = ٠,٤٩$$

(ب) إحتمال كونهما غير صالحين للاضاءة

= ح (الأول غير صالح للاضاءة) × ح (الثانى غير صالح للاضاءة)

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{١٠} = \frac{٩}{١٠٠} = ٠,٠٩$$

(جـ) إحتمال (أحدهما غير صالحين والآخر صالح)

= ح (كون الأول صالح للاضاءة والثانى غير صالح)

أو ح (كون الثانى صالح للإضاءة والأول غير صالح)

$$= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٣}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٣}{١٠} = ٠,٤٢$$

يلاحظ من خلال هذا المثال أن الحالات الثلاثة السابقة إنما تمثل الحالات الكلية الممكنة والتى يمكن الحصول عليها، وعلى ذلك نجد أن المجموع الكلى للإحتمال يساوى الواحد الصحيح.

مــثــال(١١)

إحتمــال نجـاح طـالب فـى مـادة المحاسـبة ٠,٥ وإحتمـال نجاحـه فــى مادتى المحاسبة والإحصاء ٠,٣ فإذا كان إحتمال نجاحه فى مادة واحدة علــى الأقل من هاتين المادتين ٠,٨ فما هو إحتمال نجاحه فى مادة الإحصاء.

الحل:

نرمز لنجاح الطالب فى مادة المحاسبة بالرمز (أ) ولنجاحــه فــى مــادة الاحصاء بالرمز (ب) ولنجاحه فى المادتين معا (أ ∩ ب).

حيث أن:

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

∴ ٠,٨ = ٠,٥ + ح (أ٢) - ٠,٣

∴ ح (أ٢) = ٠,٦

أى أن إحتمال نجاحه فى مادة الاحصاء = ٠,٦

الأحداث الغير مستقلة: Dependent Events

حيث نجد أن وقوع أحد الحــوادث إنمـا يؤثـر ويتـأثر بوقـوع الحـادث الآخر، ومن أمثلة الأحداث الغير مستقلة، حالات السحب بدون إرجاع (حيـث يلاحظ عدم ثبات فراغ العينة فى التجربة) فعلــى فـرض أن لدينـا الحـادث (أ) والحادث (ب) فإن إحتمال حصولنا على (أ ، ب) مع العلم بأن وقوع الحـادث (أ) يكون معلوما لدينا ويؤثر بالتالى فى إحتمال وقوع الحادث (ب) فإن:

ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب / أ)

حيث ح (ب / أ) تعنى إحتمال حصولنا علـى الحـادث (ب) مـع العلـم بوقوع الحادث (أ).

وهنـا نجـد أن إحتمـال وقوعهمـا معـا إنمـا يحمـل فـى طياتـه إحتمـال شرطى (conditional probability) وهذا يعنى أن إحتمـال حصولنـا علـى الحدث (ب) بشرط حصولنا على الحدث (أ).

مـثـال(١٣)

قام أحـد الأفـراد بسـحب وحدتيـن إنتـاجيتين عشـوائيا مـن إنتـاج أحـد المصانع يحتوى على ٩٠ وحده جيده و ١٠ غير جيده فإذا كان السحب بـدون إرجاع الوحدات المسحوبة،

فالمطلوب:

أ- إيجاد إحتمال كون الوحدتين المسحوبتين جيدتين.

ب- إيجاد إحتمال كون الوحدتين المسحوبتين غير جيدتين.

جـ- إيجاد كون احداهما جيدة والأخرى غير جيدة.

الحل:

نظراً لأن السحب يتم على التعاقب دون إرجـاع الوحـدات الإنتاجيـة، فهذا يعنى حوادث غير مستقلة وإحتمال وقوعها يتضمن إحتمال شرطى وعدم إرجاع الوحدة الانتاجيـة المسـحوبة الأولـى يعنـى إنقـاص فـراغ العينـة (عـدد **الوحدات** الكلية) بوحدة واحدة وعلى ذلك فإن:

(أ) إحتمال (كون الوحدتين المسحوبتين جيدتين)

= ح (الأولى جيدة والثانية جيدة / الأولى جيدة)

= ح (الأولى جيدة) × ح (الثانية جيدة / الأولى جيدة)

$$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times \frac{٨٩}{٩٩} = ٠,٨١$$

(ب) إحتمال (كون الوحدتين المسحوبتين غير جيدتين)

= ح (الأولى غير جيدة) × ح (الثانية غير جيدة / الأولى غير جيدة)

$$= \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{٩٩} = ٠,٠٠٩$$

(جـ) إحتمال (كون إحداهما جيدة والأخرى غير جيدة)

= ح (الأولى جيدة) × ح (الثانية غير جيدة / الأولى جيدة)

+ ح (الأولى غير جيدة) × ح (الثانية جيدة / الأولى غير جيدة)

$$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times \frac{١٠}{٩٩} + \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٩٩}$$

$$= ٠,٠٩ + ٠,٠٩ = ٠,١٨$$

مثال(١٣)

ألقيت زهرتي نرد متوازنتين، أوجد إحتمال أن يكون الوجهين متشابهين إذا كان مجموعهما عشرة.

الحل:

فراغ العينة فى هذه التجربة يحتوى على ستة وثلاثون عنصر، ونفرض أن (أ) تمثل الحصول على وجهتين مشتابهتين وبالتالى فإن:

أ = {(١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦)}

$$\therefore \text{ح (أ)} = \frac{٦}{٣٦}$$

أيضاً نفرض أن (ب) تمثل الحالات التى يكون فيها مجموع الوجهين عشرة وهو الشرط المعلوم فى التمرين، وبذلك فإن:

ب = { (٦،٤) ، (٤،٦) ، (٥،٥) }

$$\therefore \text{ح (ب)} = \frac{٣}{٣٦}$$

وبذلك يتضح أن الحالة التى يتحقق فيها الحدثين (أ و ب) معا هى (٥،٥)

$$\therefore \text{ح (أ و ب)} = \frac{١}{٣٦}$$

وبذلك فإن

$$\text{ح (أ / ب)} = \frac{\text{ح (أ و ب)}}{\text{ح (ب)}} = \frac{\frac{١}{٣٦}}{\frac{٣}{٣٦}} = \frac{١}{٣}$$

مـثـال(١٤)

ألقيت ثلاث عملات متوازنة. أوجد إحتمال الحصـول على صورتيـن بشرط أن تكون أحد الصور من العمله الأولى.

الحل:

يلاحظ فى هذه التجربة أن فراغ العينه يحتـوى علـى ثمانيـة عنـاصر وهى:

Ω = {(ص،ص،ص) ، (ص،ص،ك) ، (ص،ك،ص) ، (ص،ك،ك) ، (ك،ص،ص) ، (ك،ص،ك) ، (ك،ك،ص) ، (ك،ك،ك)}

بفرض أن الحدث (أ) يمثل الحصول على صورتين وبالتالى فإن:

أ = { (ص،ص،ك) ، (ص،ك،ص) ، (ك،ص،ص)}

∴ ح (أ) = $\frac{٣}{٨}$

كذلك نفرض أن الحدث (ب) يمثل الحصول على صـوره مـن العملـه الأولى وبالتالى فإن:

ب = {(ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)، (ص،ك،ص)، (ص،ك،ك)}

∴ ح (أ) = $\frac{٤}{٨}$

وبالتالى فإن: (أ و ب) = {(ص،ص،ك) ، (ص،ك،ص)}

∴ ح (أ و ب) = $\frac{٢}{٨}$

$$ح(أ / ب) = \frac{ح(أ و ب)}{ح(ب)} = \frac{\frac{٢}{٨}}{\frac{٤}{٨}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال(١٥)

أطلق ثلاث أشخاص النار على هدف معين فإذا كانت إحتمالات الإصابة .

على التوالى هى: $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٥}$

فالمطلوب:

١- حساب أن يصيب أحدهم الهدف

٢- إذا أصاب أحدهم الهدف، إحسب إحتمال أن يكون هو الشخص الأول.

الحل:

نرمز لإصابة الشخص الأول للهدف بالرمز ($أ_١$) وبالتالى:

$$ح(أ_١) = \frac{١}{٧} \qquad \therefore ح(\overline{أ_١}) = \frac{٦}{٧}$$

نرمز لاصابة الشخص الثانى للهدف بالرمز ($أ_٢$) وبالتالى:

$$ح(أ_٢) = \frac{١}{٦} \qquad \therefore ح(\overline{أ_٢}) = \frac{٥}{٦}$$

نرمز لإصابة الشخص الثالث للهدف بالرمز (أ٣) وبالتالى:

$$\text{ح}(\text{أ}_٣) = \frac{١}{٥} \qquad \therefore \text{ح}(\overline{\text{أ}_٣}) = \frac{٤}{٥}$$

١- حيث أن إصابة الأشخاص الثلاثة للهدف تمثل أحداث مستقلة

$\therefore$ ح (اصابه أحدهم للهدف) = ح $(\text{أ}_١)$ × ح $(\overline{\text{أ}}_٢)$ × ح $(\overline{\text{أ}}_٣)$

\+ ح $(\overline{\text{أ}}_١)$ × ح $(\text{أ}_٢)$ × ح $(\overline{\text{أ}}_٣)$

\+ ح $(\overline{\text{أ}}_١)$ × ح $(\overline{\text{أ}}_٢)$ × ح $(\text{أ}_٣)$

$$= \frac{١}{٧} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٦}{٧} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٦}{٧} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٥}$$

$$= \frac{٢٠}{٢١٠} + \frac{٢٤}{٢١٠} + \frac{٣٠}{٢١٠} = \frac{٧٤}{٢١٠}$$

٢- ح (الشخص الأول (أ) / إصابة الهدف)

$$= \frac{\text{ح (إصابة الهدف ومن الشخص الأول)}}{\text{ح (إصابة الهدف)}}$$

$$= \frac{\frac{٢٠}{٢١٠}}{\frac{٧٤}{٢١٠}} = \frac{٢٠}{٧٤}$$

نظرية بييز:

إذا كان $أ_1$ ، $أ_2$ ، ...... $أ_ن$ هى (ن) من الأحداث المتنافية وأن إتحاد هذه الأحداث مجتمعة يمثل فراغ العينه (Ω) ، وكان (ن) أى حدث فإن

$$ح(أ_ر/ب) = \frac{ح(أ_ر) \times ح(ب/أ_ر)}{ح(أ_1) \times ح(ب/أ_1) + ح(أ_2) \times ح(ب/أ_2) ... ح(أ_ن) \times ح(ب/أ_ن)}$$

مثال(١٦) .

ثلاثة صناديق يحتوى الأول على ٢٥ مصباح منها ١٠ مصابيح مطابقة للمواصفات، والثانى يحتوى على ٢٠ مصباح منها ٥ مصابيح مطابقة للمواصفات والثالث يحتوى على ٣٠ مصباح منها ١٥ مصباح مطابق للمواصفات، سحب مصباح بطريقة عشوائية، فإذا كان مطابق للمواصفات، فما إحتمال أن يكون من الصندوق الأول.

الحل:

نفرض أن $أ_1$ يمثل سحب الصندوق الأول

$$\therefore ح(أ_1) = \frac{1}{3} \quad ، \quad ح(مطابق / أ_1) = \frac{10}{25}$$

، نفرض أن $أ_2$ يمثل سحب الصندوق الثانى

$$\therefore ح(أ_2) = \frac{1}{3} \quad ، \quad ح(مطابق / أ_2) = \frac{5}{20}$$

، نفرض أن $أ_3$ يمثل سحب الصندوق الثالث.

$$\therefore ح(أ_3) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad ح(مطابق / أ_3) = \frac{١٥}{٣٠}$$

$$ح(أ/مطابق) = \frac{ح(أ_1) \times ح(مطابق/أ_1)}{ح(أ_1)\times ح(مطابق/أ_1)+ح(أ_2)\times ح(مطابق/أ_2)+ح(أ_3)\times ح(مطابق/أ_3)}$$

$$= \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{١٠}{٢٥}}{\frac{١}{٣} \times \frac{١٠}{٢٥} + \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٢٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{١٥}{٣٠}} = ٠,٣٤٨$$

ويمكن إيجاد قيمة الإحتمال المطلوب بإستخدام جدول الإحتمالات الشرطية كما سنرى فى التمرين التالى.

مثال(١٧)

ثلاثة ماكينات أ ، ب ، جـ تنتج على التوالى ٢٥٪ ، ٥٥٪ ، ٢٠٪ من الانتاج الكلى لمصنع معين ونسبه الانتاج المعيب لهذه الماكينات على التوالى هى ٣٪ ، ٥٪ ، ٢٪ ، أختيرت وحدة واحدة بطريقة عشوائية ووجدت معيبه، فما هو إحتمال أن تكون من إنتاج الماكينة (ب) ؟

الحل:

يمكن حل هذا التمرين إما بإستخدام الطريقة السابقة (أنظر المثال السابق) أو بإستخدام الإحتمالات الشرطية كما يلى:

جدول الإحتمالات الشرطية

الوحده / الآلـه	معيبة	سليمة	المجموع
أ	٠,٠٣ × ٠,٢٥ = ٠,٠٠٧٥	٠,٩٧ × ٠,٢٥ = ٠,٢٤٢٥	٠,٢٥
ب	٠,٠٥ × ٠,٥٥ = ٠,٠٢٧٥	٠,٩٥ × ٠,٥٥ = ٠,٥٢٢٥	٠,٥٥
جـ	٠,٠٢ × ٠,٢٠ = ٠,٠٠٤	٠,٩٨ × ٠,٢٠ = ٠,١٩٦	٠,٢٠
	٠,٠٣٩	٠,٩٦١	١,٠٠

$$\therefore \text{ح (من الاله ب/معيبه)} = \frac{٠,٠٢٧٥}{٠,٠٣٩} = ٠,٧٠٥$$

التوقع الرياضى: Mathematical expectation

يمكـن الحصـول علـى التوقـع الريـاضى أو القيمـة المتوقعـه (value expectaed) بضرب إحتمال وقوع حادث رياضى معين فى ما نحصل عليه من مبلغ أو تكلفة أو عائد معين عند وقوع هذا الحادث.

فإذا أعطينا الرمز (ق) لقيمة المبلغ أو التكلفة أو العائد المتحصل عليه لقيمة وقوع الحادث (أ) وأعطينا الرمز ح (أ) لإحتمال وقوع هذا الحادث فإنـه يمكن حساب القيمـة المتوقعـه أو التوقـع الريـاضى بأبسـط السبل علـى النحـو التالى:

القيمة المتوقعة (التوقع الرياضى) = ق × ح (أ)

فعلى سبيل المثال إذا خصصنـا عـائداً قدره ١٠٠ جنيـه لأى شـخص يحصل على الرقم ٥ عند إلقاءه لزهرة نرد متزنة مرة واحده، فإن التوقع

الرياضى فى هذه الحاله = $١٠٠ \times \frac{١}{٦}$ = ١٦,٧ جنيه تقريباً

ويمكن حساب القيمه المتوقعه فى حالة تعدد المبالغ المتحصل عليها وكذا الإحتمالات المناظره لهذه المبالغ كما هو واضح من الأمثلة التالية:

مثال(١٨)

يقوم شخص باعطاء مبلغ من الجنيهات مساوى لما يظهر على سطح زهرة النرد عند القاءها مرة واحده، فما هو المبلغ الواجب تحديده ثمناً لكل مشترك فى اللعبة؟

الحل:

يمكن كتابة المبالغ المتحصل وأيضاً الإحتمالات المناظره على النحو التالي:

الرقم	المبلغ	الإحتمال	المبلغ × الإحتمال
١	١	$\frac{١}{٦}$	$١ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$
٢	٢	$\frac{١}{٦}$	$٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦}$
٣	٣	$\frac{١}{٦}$	$٣ \times \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦}$
٤	٤	$\frac{١}{٦}$	$٤ \times \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦}$
٥	٥	$\frac{١}{٦}$	$٥ \times \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$
٦	٦	$\frac{١}{٦}$	$٦ \times \frac{١}{٦} = \frac{٦}{٦}$
المجموع = التوقع الرياضى = $٢١ \times \frac{١}{٦}$ = ٣,٥			

وعلى ذلك فإن المبلغ الواجب دفعه ثمنا لهذه اللعبه دون تحقيق أى مكسب أو خساره = ٣,٥ جنيه، وهـى قيمـة متوسـطة حيث لـو أجريت هذه اللعبه عدداً كثيراً من المرات فإن الشخص سيحصل على مبلغ ٣,٥ جنيه فـى المتوسط للمره الواحده.

مـثـال(١٩)

سجل أحد المحاسبين فـى إحدى الشركات الإنتاجيـة التكـاليف خـلال السنه القادمه وهى بيانات ربع سنويه فكانت على النحو التالى:

الفترة الزمنية	التكاليف التقديرية	الإحتمال
الربع الأول من السنة	١٤٠٠٠	٠,٧٥
الربع الثانى من السنة	١٣٠٠٠	٠,٦٧
الربع الثالث من السنة	١٥٠٠٠	٠,٧٢
الربع الأخير من السنة	١٧٠٠٠	٠,٦٩

المطلوب:

إيجاد ما يتوقع من تكاليف غير مباشرة فى العام القادم

الحل:

ما يتوقع من تكاليف غير مباشرة فى العام القادم علـى مـدى الفترات الأربعة عبارة عن التوقع الرياضى للتكاليف وعلى ذلك فإن:

التكاليف التقديرية	الإحتمال	التكاليف التقديرية × الإحتمال
١٤٠٠٠	٠,٧٥	١٠٥٠٠
١٣٠٠٠	٠,٦٧	٨٧١٠
١٥٠٠٠	٠,٧٢	١٠٨٠٠
١٧٠٠٠	٠,٦٩	١١٧٣٠
المجموع الكلى = التوقع الرياضى = ٥١٨٤٠		

بمعنى أن التكاليف الغير مباشرة المتوقعه خلال العام القادم = ٥١٨٤٠ جنيه

مـثـال(٣٠)

تتعامل إحدى شركات التـأمين مع ثلاث أنواع من وثائق التـأمين هـى (وثيقة تأمين على الحياة ووثيقة تأمين ضد الحوادث ووثيقـة تـأمين الحريـق)، فإذا علـم أن مبـالغ التـأمين علـى الحيـاة فـى العـام القـادم هـى ٤٠٠٠٠ جنيـه ومبـالغ التـأمين ضـد الحـوادث فـى العـام القـادم هـى ٥٠٠٠٠ جنيـه، ومبـالغ التأمين ضد الحريق فى العام القادم هى ٦٥٠٠٠ جنيه.

ومن البيانات التاريخيه عن إحتمالات المبالغ المدفوعه للأنواع الثلاثة كانت على التوالى (٠,٧ ، ٠,٦ ، ٠,٩)

المطلوب:

إيجاد ما يتوقع أن تدفع شركة التأمين فـى العـام القـادم كمبـالغ تـأمين عن المبالغ الثلاثة السابقة.

الحل:

فى هذه الحالة نجد أن المبلغ الاجمالى المتوقع دفعـه فـى العـام القـادم عبارة عن التوقع الرياضى وعليه فإن:

مبالغ التأمين المتوقع دفعها فى العام القادم = القيمة المتوقعه حيث:

القيمة المتوقعه = ٤٠٠٠٠ × ٠,٧ + ٥٠٠٠٠ × ٠,٦

+ ٦٥٠٠٠ × ٠,٩ = ١١٧٥٠٠ جنيه

الباب الثالث

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

Permutation & Condinations and Binomial theorem

الفصل الأول: التباديل والتوافيق

كثيراً ما نهتم في مجال الدراسات الاجتماعية والاقتصادية بعملية تكوين مجموعة من الأشياء فى شكل معين دون الاهتمام بترتيبها المنظم أو الاهتمام بهذا الترتيب المنظم ويكون ذلك فى توزيع الجوائز أو تكوين لجان معينة أو شغل المناصب بطرق مختلفة إلى غير ذلك.

وتهتم فكرة التباديل والتوافيق بإعطاء عدد الطرق الممكنة لذلك من خلال بعض القواعد الرياضية التى تسهل هذا التكوين.

أولاً: القوانين الأساسية للتباديل

افترض أنه لدينا ثلاثة طائرات فى أحد المهرجانات الدولية ولقد خصص ثلاث جوائز توزع عليها بعد العرض وعلى فرض أن هذه الجوائز مرتبة حسب قيمتها (جائزة أولى، جائزة ثانية، وجائزة ثالثة) كما أنه لا يجوز الفوز بأكثر من جائزة واحدة فإنه يمكن استعراض الطرق الممكن أن تكون بها الجوائز على النحو التالى:

الطريقة الأولى: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الأولى، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الثانية، الطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الثالثة.

الطريقة الثانية: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الأولى، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الثالثة، والطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الثانية.

الطريقة الثالثة: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثانية، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الأولى، والطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الثالثة.

الطريقة الرابعة: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثانية، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الثالثة، والطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الأولى.

الطريقة الخامسة: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثالثة، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الأولى، والطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الثانية.

الطريقة السادسة: الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثالثة، الطائرة الثانية تفوز بالجائزة الثانية، والطائرة الثالثة تفوز بالجائزة الأولى.

وهكذا نجد أنه يمكن وضع ستة ترتيبات لتوزيع هذه الجوائز الثلاث حيث افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الأولى وترتب على ذلك وجود طريقتين كما افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثانية وترتب على ذلك وجود طريقتين كما افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثالثة وترتب على ذلك وجود طريقتين وعلى ذلك يكون عدد الطرق الكلى ستة طرق.

كما أننا نحصل على نفس النتيجة لعدد الطرق لو افترضنا أن الطائرة الثانية هى التى تفوز بالجائزة الأولى وأيضاً إذا ما افترضنا أن الطائرة الثالثة هى التى تفوز بالجائزة الأولى.

وهنا يمكن القول بأن الجائزة الأولى يمكن أن تمنح بثلاث طرق

والجائزة الثانية يمكن أن تمنح بطريقتين فقط وذلك بعد منح الجائزة الأولى كما أن الجائزة الثالثة تمنح بطريقة واحدة وذلك بعد منح الجائزة الأولى ثم الثانية. ونظراً لارتباط توزيع الجائزة الثانية بالأولى وارتباط الثالثة بالثانية فيكون:

عدد طرق توزيع الجوائز = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق

وأيضاً لو افترضنا أنه لدينا كتابين (الاحصاء والرياضة البحتة) وأردنا منح هذه الكتب لطالبين على الترتيب بشرط ألا يحصل أحدهما على أكثر من كتاب واحد.

فى هذه الحالة يمكن افتراض أن الطالب الأول يحصل على كتاب الاحصاء وبالتالى فإن الطالب الثانى يحصل على كتاب الرياضة البحتة وهذه طريقة كما أنه يمكن افتراض أن الطالب الأول يحصل على كتاب الرياضة البحتة وبالتالى فإن الطالب الثانى يحصل على كتاب الاحصاء وهذه هى الطريقة الثانية ولا يوجد طرق أخرى لتوزيع الكتابين. وهنا يمكن القول بأن الكتابين يمكن توزيعهما على الطالب الأول بطريقتين وبالتالى فإن توزيع الكتابين على الطالب الثانى لا يمكن أن يتم إلا بطرقة واحدة بعد ذلك.

وعلى ذلك فإن عدد الطرق = ٢ × ١ = ٢ طريقة

وأيضاً إذا كان لدينا أربعة كراسى شاغرة بالصف الأول فى أحد المسارح وأردنا شغل هذه الأماكن بأربعة أفراد ممن يرغبون فى الجلوس فى الصف الأول فإنه يمكن شغل المكان الأول بأربعة طرق وبعد ذلك شغل المكان الثانى بثلاث طرق فقط. ثم يتم شغل المكان الثالث بطريقتين وأخيراً يمكن شغل المكان الرابع بطريقة واحدة فقط ونظراً لارتباط شغل الأماكن فإن:

عدد الطرق التى يمكن بها شغل هذه الأماكن = ٤× ٣× ٢× ١ = ٢٤ طريقة

كما أنه على افتراض مقدم برنامج تلفزيونى يريد أن يقدم أربعة أغانى أوربية من ستة أغانى على مدار فترة البرنامج (ساعة) فبكم طريقة يمكن تقديم هذا البرنامج، فى هذه الحالة نجد أن الأغنية الأولى يمكن تقديمها بطرق عددها ستة طرق والثانية بطرق عددها خمسة والثالثة بطرق عددها أربعة والأغنية الأخيرة بطرق عددها ثلاثة طرق ونظراً لاقتران الطرق فإن:

عدد طرق تقديم البرنامج التلفيزيونى = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

ولنا أن نختار طريقة واحدة منها لتقديمها حيث أننا هنا نهتم بالترتيب التبادلى.

القانون الأول:

فى كل هذه الأمثلة يلاحظ أنه تم أخذ الشئ الأول بعدة طرق كما أنه تم أخذ الشئ الثانى بعدة طرق أيضاً وهكذا كنا نحصل على عدد الطرق الكلية بضرب عدد الطرق لأشياء على انفراد وهو يعطى عدد الطرق نفسه فى التفسير المفصل وعليه فإن:

عدد الطرق الكلى = (عدد طرق الشئ الأول × عدد طرق الشئ الثانى × .....)

وعلى فرض أن عدد الطرق الكلى (ن) وأن عدد طرق كل شئ هى ($ن_ر$) فإن:

ن = ($ن_١$ × $ن_٢$ × $ن_٣$ × ......)

القانون الثاني:

إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء (ن) وتم ترتيب هذه الأشياء معاً ترتيباً تبادلاً (ل) مأخوذة كلها أو بعضها (عدد مقداره ر).

فإن:

عدد الطرق التبادلية:

$$^{ن}ل_{ر} = ن\ (ن - ١)\ (ن - ٢)\ (ن - ٣)\ .....\ (ن - ر + ١)$$

في مثال الطائرات فإن: $^{٣}ل_{٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$ طريقة.

في مثال الكتب فإن: $^{٢}ل_{٢} = ٢ \times ١ = ٢$ طريقة.

في مثال الكراسي فإن: $^{٤}ل_{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$ طريقة.

في مثال الأغنيات فإن: $^{٦}ل_{٤} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$ طريقة.

ومما هو جدير بالملاحظة أنه في الأمثلة الثلاث الأولى فإننا كنا نأخذ الأشياء كلها في ترتيب المجموعات وهذا يعني أن ن = ر وبالتالي يمكن كتابة الصيغة الأخير على النحو التالي وذلك عندما ن = ر.

$$^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ن} = ن\ (ن - ١)\ (ن - ٢)\ (ن - ٣)\ ......\ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

ويطلق على الشكل السابق باسم مضروب وتكتب على النحو:

<u>إن</u> أو ن ! وسوف نأخذ الشكل الأخير للمضروب.

شكل آخر لعدد الطرق ($^{ن}ل_{ر}$):

على فرض أن:

$$^{ن}ل_{ر} = ن\ (ن - ١)\ (ن - ٢)\ (ن - ٣)\ ....\ (ن - ر + ١)$$

فإن:

$$\frac{{}^{ن}ل_{ر}}{(ن - ر)!} = \frac{ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢)\,(ن - ٣) \ldots\ldots (ن - ر + ١)}{(ن - ر)!}$$

أى أن:

$${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢)\,(ن - ٣) \ldots (ن - ر + ١)\,(ن - ر)!}{(ن - ر)!}$$

وذلك بالقسمة على (ن − ر)! للطرفين.

وعليه فإن:

$${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ (وهو شكل آخر مستخدم)

حيث نجد مثلاً: $${}^{١٠}ل_{٧} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٦٠٤٨٠٠$$

وأيضاً: $${}^{١٠}ل_{٧} = \frac{١٠!}{(١٠ - ٧)!}$$

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= ٦٠٤٨٠٠$$

من العلاقة السابقة بين ${}^{ن}ل_{ر}$ ، $\frac{ن!}{(ن - ر)!}$ يمكن معرفة قيمة مضروب (صفر)

بما أن : $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

وعند وضع (ن = ر) نستنتج ما يلى:

$$^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ن} = \frac{ن!}{(ن - ن)!} = \frac{ن!}{صفر!}$$

إذن:

$$صفر! = \frac{ن!}{ن!} = ١$$

إذن هذا يفترض أن مضروب يساوى أيضاً الواحد الصحيح

القانون الثالث:

فى جميع الأمثلة السابقة كنا نفترض ان المتسابق لا يجوز له الحصول على أكثر من جائزة وأيضاً الطالب يحصل على كتاب واحد فقط كما أن شغل الأماكن الشاغرة يتم بترتيب تنازلى عن طريق شغل المكان الأول بكل الأشياء ثم المكان الثانى بأقل من عدد الأشياء بالواحد الصحيح وهكذا ولكن إذا ما اطلقنا الحصول على الجوائز كلها للفرد الواحد أو حصول الكتب كلها للطالب الواحد أو شغل المكان الواحد بكل الأشياء فى جميع الحالات هنا نجد أن عدد الطرق عبارة عن عدد الأشياء مضروباً فى نفسه من المرات أو (ر) من المرات وعلى ذلك فإن:

عدد الطرق = $ن_{١} \times ن_{٢} \times ن_{٣} \times .... ن_{ن} = (ن^{ن})$

عند ترتيب الأشياء كلها أى أن ن = ^{ن}

أو عدد الطرق = $ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times .... ن_ر = (ن^ر)$

فإذا افترضنا فى مثال الطائرات انه يجوز لكل طائرة الحصول على الأربعة جوائز كلها معاً فإن:

عدد الطرق = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = $(٤)^٤$ = ٢٥٦ طريقة

كما أن فى مثال الكتب فإن:

عدد الطرق = ٢ × ٢ = $(٢)^٢$ = ٤ طرق

وإذا ما كان لدينا ثمانية كتب يراد أن توزع على ثلاث طلاب بشرط يمكن لكل طالب الحصول على الثلاث كتب كلها فإن:

ن = ٨ ، ر = ٣

هنا نجد أن الطالب الأول يمكن الحصول على الثمانية كتب وكذلك الطالب الثانى والطالب الثالث وعلى ذلك فإن:

عدد الطرق المطلوبة $(ن^ر)$ = $(٨^٣)$ = ٥١٢ طريقة

وأيضاً إذا افترضنا أنه لدينا خمسة أغانى مختلفة يراد تقديها كلها على مدار يوم إذاعى ويمكن أن نقدم أغانى متشابهة فإن:

عدد الطرق = $(٥)^٥$ = ٥ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = ٣١٢٥ طريقة

القانون الرابع:

ويخص هذا القانون حالة كون الأشياء (ن) تحتوى على أشياء متشابهة داخلية (متكررة) مثل تكرار الحروف فى الأسماء أو تكرار الأعداد سواء كانت زوجية أو فردية وألعاب الميكانو والأصناف المتشابهة فإن:

$$\text{عدد الطرق} = \frac{\text{مضروب كل الأشياء مجتمعة}}{\text{حاصل ضرب مضروب كل الأشياء المتشابهة منفصلة}}$$

فإذا كان عدد الأشياء مجتمعة ن وكان لدينا الأعداد س ، م ، ع للأشياء الداخلة فى ن فإن :

$$\text{عدد الطرق التبادلية} = \frac{\text{ن !}}{\text{س! × م! × ع!}}$$

فإذا افترضنا أنه لدينا لعبة تحتوى على ١٠ قطع (ميكانو) منهم أربعة مثلثات وثلاث مستطيلات وثلاث مربعات فإن عدد اللعب الممكن تكوينها من كل هذه القطع يكون:

$$\frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ..... \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ١ \times ٢ \times ٣ \times ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٤٢٠٠ \text{ لعبة}$$

وأيضاً الاسم (بابا) يحتوى على أربعة حروف منهم الباء متكررة والألف أيضاً متكررة وعليه فإن:

$$\text{عدد الأسماء التى يمكن تكوينها} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}{١ \times ٢ \times ١ \times ٢} = ٦ \text{ طرق}$$

كذلك لو افترضنا طلبية تتكون من أربعة أصناف وهى فى الواقع ثلاث فقط نظراً لتكرار أحد الأصناف فإنه يمكن التنسيق على النحو التالى:

$$\text{عدد طرق تستيف هذه الطلبية} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}{١ \times ٢} = ١٢ \text{ طريقة}$$

أمثلة متنوعة على القوانين الأساسية للتباديل:

مـثـال(١)

فى سباق الخيل خصص ثلاث جوائز لكل من الفائز الأول والثانى والثالث فإذا علم انه يجرى فى حلبة السباق عشرة متسابقين فبكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الثلاث بشرط لا يحصل الفائز إلا على جائزة واحدة.

الحل:

هنا نجد أن:

عدد الأشياء = ن = ١٠ متسابق

يراد ترتيبها راء راء أى أن : ر = ٣ جائزة

وعليه فإن:

عدد الطرق = $^{١٠}ل_{٣}$ = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠ طريقة

مـثـال(٢)

فى المثال السابق ماذا يكون عدد الطرق إذا كان لدينا على الترتيب:

٥ جوائز

٧ جوائز

١٠ جوائز

الحل:

عدد الطرق فى حالة وجوده ٥ جوائز

$${}^{١٠}ل_{٥} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٠٢٤٠$$

- عدد الطرق فى حالة وجود ٧ جوائز

$${}^{١٠}ل_{٧} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٦٠٤٨٠٠$$

- عدد الطرق فى حالة وجود ١٠ جوائز=مضروب ١٠ أى ${}^{١٠}ل_{١٠} = ١٠!$

ونحن نعرف أن ${}^{١٠}ل_{١٠} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ...... ٣ \times ٢ \times ١$

$$= ٣٦٢٨٨٠٠$$

مـثـال(٣)

ماذا يحدث فى جميع الحالات السابقة لو أتيح لكل فائز الحصول على كل الجوائز مرة واحدة.

الحل:

- عدد الطرق عند وجود ٣ جوائز $= (٣^{١٠}) = ٥٩٠٤٩$
- عدد الطرق عند وجود ٥ جوائز $= (٥^{١٠}) = ٩٧٦٥٦٢٥$
- عدد الطرق عند وجود ٧ جوائز $= (٧^{١٠}) = ٢٨٢٤٧٥٢٤$
- عدد الطرق عند وجود ١٠ جوائز $= (١٠^{١٠}) = ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠$

مـثـال(٤)

حديقـة للأطفـال تحتـوى علـى ١٠ أطفـال و١٥ طفلـة و ٣ مربيـات للأطفال أردنا اختيار ثلاثة من الحديقة لتجربة استخدام أحد اللعب فى الحديقـة بشرط احتواء الثلاثة المختارين على واحد من كـل نـوع فبكم طريقـة يمكـن ذلك إذا علم أننا نعطى أهمية لترتيب الأشخاص عند استخدام اللعبة.

الحل:

يمكن اختيار طفل واحد من الأطفال بعدد طرق = ^{١٠}ل$_{١}$ = ١٠

يمكن اختيار طفلة واحدة من الأطفال بعدد طرق = ^{١٥}ل$_{١}$ = ١٥

يمكن اختيار مربية واحدة من المربيات بعدد طرق = ^{٣}ل$_{١}$ = ٣

وعلى ذلك فإن عدد الطرق الكلى = ١٠ × ١٥ × ٣ = ٤٥٠ طريقة

مـثـال(٥)

فـى أحـد الـدول يوجـد فـى كـل ميـدان خمسـة دواليـب أوتوماتيكيـة لـتزويد الأفـراد بخمسـة أنـواع مـن المرطبـات فـإذا كـان لدينـا مائـة شـخص يـترددون كـل سـاعة علـى هـذه الدواليـب فبكـم طريقـة يمكـن الحصـول علـى هـذه المرطبـات كـل سـاعة.

الحل:

الدولاب الأول يشغل مائة فرد.

الدولاب الثانى يشغل ٩٩ فرداً.

والدولاب الثالث يشغل ٩٨ فرداً.

والدولاب الرابع يشغل ٩٧ فرداً.

والدولاب الأخير يشغل ٩٦ فرداً.

وعلى ذلك فإن عدد الطرق فى هذه الحالة

$^{١٠٠}\text{ل}_{٥}$ = ١٠٠× ٩٩× ٩٨ × ٩٧ × ٩٦

مـثـال(٦)

فى أحد دور إصلاح الاحداث يراد تكوين عـدة مجموعـات مـن مائـة شخص بشرط كل مجموعـة تحتوى على عشرة أفراد وهو العدد المعادل للجوائز المخصصة لمن يبلى بلاءاً حسناً فى دار الاصلاح فبكم طريقة يمكـن توزيع هذه الجوائز.

الحل:

عدد الأشياء (ن) مائة فرداً

مرتبـة راء راء حيـث قيمـــة (ر) = ١٠ (عــدد الجوائــز وحجــم المجموعة)

∴ عدد الطرق = $^{١٠٠}\text{ل}_{١٠}$ = ١٠٠× ٩٩ × .... (١٠٠ − ١٠ + ١)

مـثـال(٧)

إذا علم أن $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}$ = ٢٤ أوجد قيمة ن

الحل:

من المفروض أن $^{ن}ل_{٣}$ = ن (ن −١) (ن − ٢) = ٢٤

إذن:

ن (ن − ١) (ن − ٢) = ٤ × ٣ × ٢ = وبذلك نجد أن

ن = ٤

مـثـال(٨)

إذا علم أن $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ أوجد قيمة (ر).

الحل:

نظراً لأن $^{٥}ل_{ر}$ = ٥ (٥−١) (٥−٢) .... (٥− ر + ١)

وبتحليل القيمة ٦٠ إلى = ٥ × ٤ × ٣ حيث ٣ هى (٥ − ر + ١)

إذن ر لابد ان تساوى ٣

مـثـال(٩)

أثبت أن:

$$\frac{(ن + ٩)!}{(ن + ٧)!} = ن^{٢} + ١٧ ن + ٧٢$$

الحل:

$$\frac{(ن + ٩)\ !}{(ن + ٧)\ !} = \frac{(ن + ٩)\ (ن + ٨)\ (ن + ٧)\ !}{(ن + ٧)\ !}$$

= (ن +٩) (ن + ٨)

إذن:

$$\frac{(ن + ٩)\,!}{(ن + ٧)\,!} = ن^{٢} + ١٧\, ن + ٧٢$$

ثانياً: القوانين الأساسية للتوافيق:

تعريف التوافيق والعلاقة بالتباديل:

إذا افترضنا أن أحد البرامج التليفزيونية يعرض ٥ أغانى أجنبية من ٧ أغانى على مدار ساعة كاملة فى هذه الحالة نجد أن لمقدم البرنامج حرية تقديم طريقة واحدة من عدد طرق = $^{٧}ل_{٥}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣

= ٢٥٢٠ طريقة

وهنا نلاحظ أن ترتيب تقديم الأغنية له أهمية حيث تختلف الطريقة عن الأخرى من خلال ترتيب الخمسة أغانى المقدمة فيكون ذلك بتبديل السبعة أغانى مأخوذة خمسة أغانى فى كل مرة مع الاحتفاظ بالترتيب.

ولكن إذا قلنا أننا بصدد سبعة شرائط (فيديو) مسجل على كل منها خمسة أغانى مختلفة ويراد شراء خمسة منهم فقط فبكم طريقة يمكن ذلك؟

هنا نجد أن الأمر يختلف عن التباديل حيث أن محتويات (الشريط) هى الأهم دون التركيز على ترتيب الأغانى داخل الشريط المسجل نفسه وهنا بالطبع فإن عدد طرق الاختيار (الشراء) سوف تكون أقل من حالة التباديل، فإذا أعطينا للشرائط السبع الحروف (أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ع) فإننا

يمكن الحصول على مجموع التوافيق أو التراتيب التالية مع استبعاد كل مجموعة متشابهة فى ذات الشرائط:

الطريقة الأولى: (أ ، ب ، جـ ، د ، هـ)

الطريقة الثانية: (أ ، ب ، جـ ، د ، و)

الطريقة الثالثة: (أ ، ب ، جـ ، د ، ع)

ونستمر فى هذا الأخذ حتى يكون لدينا (٤٢) مجموعة مختلفة تماماً.

مثال آخر:

إذا افترضنا أنه لدينا ثلاث أبطال فى رفع الأثقال على مستوى الجمهورية وأردنا أن نرشح منهم اثنين للأوليمبياد فى هذه الحالة يكون ما يلى:

الطريقة الأولى: البطل الأول والبطل الثانى.

الطريقة الثانية: البطل الأول والبطل الثالث.

الطريقة الثالثة: البطل الثانى والبطل الثالث.

وهنا نجد أن كل مجموعة تختلف تماماً عن المجموعة الأخرى وهذا يعنى أننا نقوم باختيار شخصين من ثلاثة أشخاص وهذا هو المقصود بعملية التوافيق وهى عملية نبدأ بها أولاً إذا أردنا الاختيار أما إذا كان المراد هو منح جوائز فإننا هنا نقوم بالترتيب بعد الاختيار أى أن الطريقة الأولى يمكن أن ترتب على هذا النحو (البطل الثانى والبطل الأول) وكذلك الطريقة الثانية يمكن أن ترتب على هذا النحو (البطل الثالث والبطل الأول) وكذلك الطريقة

الثالثة يمكن ترتيبها على أساس (البطل الثالث والبطل الثانى) وبذلك فيكون عدد التباديل (مع الاهتمام بالترتيب) هى ستة طرق أما عدد التوافيق أو الاختيارات فهى ثلاثة فقط.

وهكذا يمكن ملاحظة أن عدد التباديل = $^{3}ل_{2}$ = ٣ × ٢ = ٦ طرق.

ونظراً لأن كل طريقة من الطرق الاختيارية السابقة يمكن أن تعطى لنا عدد من الطرق التبادلية = ٢ ! أى ٢ × ١ = ٢ طريقة.

$$\text{فيكون عدد الطرق التوافقية} = \frac{^{3}ل_{2}}{2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ طرق}$$

القانون الأول:

وعلى ذلك يمكن استنتاج ما يلى:

إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء (ن) وأردنا أخذها فى وضع توافقى فى كل مرة عدد مقداره ($ر$) أى مرتبة راء راء فإن:

عدد طرق التوافيق يفترض أنها = ك .

عدد طرق التباديل يفترض أنها = $^{ن}ل_{ر}$.

ونظراً لأن كل توفيقه تحتوى على طرق تبادلية = $ر!$

إذن:

$$\text{عدد طرق التوافيق وسنعطى لها الرمز } (^{ن}ق_{ر}) = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$$

وهو القانون الأساسى فى التوافيق.

فإذا افترضنا أننا نريد تكوين عدد من المجموعات نختار فيها مائة طفل فى أحد دور الاصلاح الاجتماعى وذلك على أساس كل مجموعة تتكون من عشرة أطفال لفرض زيارة بعض مصانع الانتاج فى الجمهورية. فبكم طريقة يمكن تكوين هذه المجموعات.

هنا نلاحظ أن الطفل له الحق فى زيارة واحدة بمعنى أن الترتيب داخل المجموعة ليس مهم ولكن المهم اختلاف كل مجموعة عن الأخرى وعلى ذلك فإننا نقوم بالاختيار لتحديد عدد الطرق التوافقية.

$$\text{عدد الطرق} = \frac{{}^{١٠٠}\text{ل}_{١٠}}{١٠\,!} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨ \times \ldots\ldots \times ٩١}{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times \ldots\ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

بعض العلاقات العامة فى التوافيق:

وفى القانون السابق بوضع $ {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن} - \text{ر})\,!} $ يمكن كتابة ما يلى:

$$\text{عدد الطرق التوافقية } ({}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}) = \frac{\text{ن}\,!}{\text{ر}\,!\,(\text{ن} - \text{ر})\,!} \quad \text{(وهى العلاقة الأولى)}$$

$$\text{ونظراً لأن: } ({}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}) = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن}-\text{ر})\,!\,[\text{ن} - (\text{ن} - \text{ر})]\,!} = \frac{\text{ن}\,!}{\text{ر}\,!\,(\text{ن} - \text{ر})\,!}$$

وبالنظر إلى العلاقة الأولى نجد أن:

$({}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}})$ (وهى العلاقة الثانية)

وكما نعرف أنه إذا كان لدينا خمسة أشياء يراد ترتيبها كلها مرة واحدة ترتيباً توافقياً فيكون لدينا طريقة واحدة فقط وهذا يعنى (عندما ن = ر)

نجد:

$${}^{ن}ق_{ن} = \frac{ن\,!}{ن\,!} = \text{واحد صحيح (وهى العلاقة الثالثة)}$$

ومن العلاقة الثانية والثالثة يمكن استنتاج ما يلى:

$${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{ن-ن} = {}^{ن}ق_{صفر} = \text{واحد صحيح (بالاستنتاج)}$$

وهذا يعنى أن:

$${}^{ن}ق_{صفر} = \frac{ن\,!}{ن\,!\,(صفر)\,!} = \frac{١}{صفر\,!} = ١$$

(وهى العلاقة الرابعة)

وهذا يجعلنا أن نفترض دائماً أن مضروب (صفر) يساوى الواحد الصحيح.

وأخيراً فإنه إذا كان لدينا (ن) من الأشياء ويراد وضعها فى شكل مجموعات كل مجموعة تحتوى على مفردة واحدة فإن ر = ١ ويكون:

عدد الطرق = ${}^{ن}ق_{١}$ = ن (العلاقة الخامسة)

فإذا كانت (ن) = ١٠ فيكون لدينا عشرة مجموعات مختلفة كل مجموعة تحتوى على مفردة واحدة فقط.

وحيث أن :

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن\,!}{ر\,!\,(ر-١)\,!}$$

$${}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{ن\,!}{(ر-١)\,!\,(ن-ر+١)\,!}$$

إذن:

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن\,!}{ر\,!\,(ن-ر)\,!} \times \frac{(ر-١)\,!\,(ن-ر+١)\,!}{ن\,!}$$

أى أن:

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{(ر-١)\,!\,(ن-ر+١)\,(ن-ر)\,!}{ر\,(ر-١)\,!\,(ن-ر)\,!}$$

$$\therefore = \frac{ن-ر+١}{ر}$$ **(وهى العلاقة الخامسة)**

وعلى ذلك فإن:

$${}^{١٠}ق_{٧} \div {}^{١٠}ق_{٦} = \frac{١٠-٧+١}{٧} = \frac{٤}{٧}$$

أمثلة متنوعة ...

مثال(١٠)

فريق لكرة القدم يحتوى على عشرين لاعباً يراد تكوين مجموعات تحتوى كل مجموعة على إحدى عشر لاعباً فكم مجموعة يمكن تكوينها؟

الحل:

هنا الترتيب غير مهم ولكن الأهم المجموعات المختلفة.

إذن:

$$\text{عدد المجموعات} = {}^{٢٠}\text{ق}_{١١} = \frac{{}^{٢٠}\text{ل}_{١١}}{١١!}$$

$$= ({}^{٢٠}\text{ق}_{٩}) = \frac{(٢٠ \times ١٩ \times .... \times ١٢)}{(٩ \times ٨ \times .... \times ١)}$$

مثال(١١)

حديقة للعب الأطفال تحتوى على (١٠) طفلاً، (١٥) طفلة وثلاث مربيات أريد تكوين مجموعات منهم كل مجموعة تحتوى على ثلاث أفراد (أياً كان أنواعها) وذلك لزيارة ألمانيا الغربية للأطلاع على أحدث حدائق الأطفال هناك فبكم طريقة يمكن ذلك.

الحل:

نظراً لعدم التخصيص للنوع فإننا هنا نقوم باختيار ٣ مفردات من ٢٨ مفردة وعلى ذلك فإن عدد الطرق $= ({}^{٢٨}\text{ق}_{٣}) = \frac{٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٢٧٦$

مــثــال(١٢)

إذا أردنا فى المثال الثاني ضرورة تمثيل مفـردة مـن كل نوعيـة فـإن

عدد الطرق = $({}^{10}ق_{1})\ ({}^{15}ق_{1})\ ({}^{3}ق_{1})$ = ١٠ × ١٥ × ٣ = ٤٥٠ طريقة

مــثــال(١٣)

يحتوى إحدى مكاتب الاستشارات الفنية الهندسية على ما يلى:

(١) ١٠ أشخاص يقومون بالعمل الإدارى.

(٢) ١٥ شخصاً يقومون بالعمل الفنى.

(٣) ١٥ شخصاً يقومون بالعمل الهندسى.

أريد افتتاح فرع جديد لهذا المكتب فى العاصمة اللبنانية بحيث يتكـون من إثنين من الإداريين واثنين من الفنيين ومهندس واحـد فبكـم طريقـة يمكـن ذلك.

الحل:

عدد الطرق لاختيار عدد اثنين إداريين = $ {}^{10}ق_{2} = \frac{١٠ × ٩}{٢ × ١} $

= ٤٥ طريقة

عدد الطـرق لاختيار عـدد اثنين فنيين = $ {}^{15}ق_{2} = \frac{١٥ × ١٤}{٢ × ١} $

= ١٠٥ طريقة

عدد الطرق لاختيار مهندس واحد فقط = $ {}^{5}ق_{1} $ = ٥ طرق.

ونظراً لاقتران عدد الطرق فى كل حالة مع بعضهم البعض إذن:

عدد الطرق المطلوبة = ٤٥ × ١٠٥ × ٥ = ٢٣٦٢٥ طريقة.

مـثـال(١٤)

إذا علم أن $^{ن}ق_{ن-٤}$ = ١٣٦٥ أوجد قيمة (ن).

الحل:

بما أن: $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

$\therefore$ $^{ن}ق_{ن-٤} = {}^{ن}ق_{٤}$ $\qquad\qquad$ $\therefore$ ر = ٤

وعلى ذلك فإن: $^{ن}ق_{٤}$ = ١٣٦٥ وعليه فإن ن = ١٥

الفصل الثانى : نظرية ذات الحدين

تهتم نظرية ذات الحدين بإيجاد مفكوك أى مقدار ذى حدين (أو أكثر) مرفوع إلى قوة مقدارها (ن) وذلك فى ظل قيود معينة لقيمة (ن) حيث تضع لنا أسلوباً رياضياً يستخدم لإيجاد الحد العام فى المفكوك وأيضاً كل الحدود المطلوبة أيضاً.

وعند استخدام هذه النظرية فى إيجاد المفكوك المطلوب فإننا سوف نميز بين (ن) في حالة كونها عدد صحيح موجب وعندما تكون مقدار سالب أو مقدار كسر (أقل من الواحد الصحيح الموجب).

أولاً: عند (ن) عدد صحيح موجب:

إذا كان لدينا مقدار ذو حدين مرفوع لقوة مقدارها (ن) فإن إيجاد مفكوك هذا المقدار يمكن أن يكون عن طريق أسلوب الضرب العادى وذلك بضرب المقدار بحديه فى نفسه عدد من المرات مقداره (ن) بادئين بضربه فى نفسه مرتين ثم نوجد حاصل الجمع والناتج يضرب مرة أخرى فى المقدار ثم نوجد حاصل الجمع وهكذا يضرب الناتج فى ذات المقدار ثم نوجد حاصل الجمع ونكرر هذه العملية على حسب قيمة (ن).

فعند $(س + ص)^{٣}$ فإننا نقوم بضرب الرمز (س) فى المقدار الثانى وكذلك ضرب الرمز (ص) من المقدار الأول فى حدى المقدار الثانى ثم نجمع النواتج فنحصل على ما يلى:

$$(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س\ ص + ص^{٢}$$

أى مربع الرمز الأول بالإضافة إلى ضعف حاصل ضرب الرمز الأول فى الرمز الثانى مضافاً إلى مربع الرمز الثانى.

وأيضاً عند إيجاد مفكوك $(س + ص)^{٣}$ فإننا نبدأ أولاً بإيجاد مفكوك $(س + ص)^{٢}$ والناتج بضرب مرة واحدة فى المقدار (س + ص) وهنا نحصل على ما يلى:

$$(س + ص)^{٣} = (س + ص)^{٢} (س + ص)$$

$$= س^{٣} + ٣س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} + ص^{٣}$$

وأيضاً لإيجاد $(س + ص)^{٤}$ فإننا نقوم بضرب $(س + ص)^{٣}$ فى (س+ص).

وهنا نحصل على الناتج التالى:

$$(س + ص)^{٤} = س^{٤} + ٤س^{٣} ص + ٦س^{٢} ص^{٢} + ٤س ص^{٣} + ص^{٤}$$

وأيضاً لإيجاد $(س + ص)^{٥}$ يمكن الحصول على مفكوك هذا المقدار بضرب $(س + ص)^{٤}$ (س + ص) حيث نحصل على ما يلى:

$$(س + ص)^{٥} = س^{٥} + ٥س^{٤} ص + ١٠س^{٣}ص^{٢} + ١٠س^{٢}ص^{٣} + ٥س ص^{٤} + ص^{٥}$$

وهكذا يمكن الحصول على مفكوك أى مقدار (ذو حدين وربما أكثر) وذلك باتباع أسلوب الضرب العادى.

ولكن إذا ما كان استخدام هذا الأسلوب سهلاً عند ن = ٢ أو ن = ٣ وأيضاً عند ن = ٤ فإننا سوف نقابل بعض الصعوبات عند ن = ١٠ أو ن = ٢٠ وهكذا، لذلك فإنه من الأفضل إيجاد بعض العلاقات بين ن وعدد

نواتج الضرب (عدد الحدود) وبين ترتيب الحد ومعاملة والترتيب التصاعدى أو التنازلى لقوى (المقدار ذو الحدين) عند إيجاد المفكوك، هذا ما تم عمله فعلاً من خلال نظرية ذات الحدين حيث تم الاستفادة بهذه العلاقات ووضع صيغة رياضية لقيمة الحد العام فى المفكوك والذى يستخدم فى إيجاد كل الحدود.

شرح مفكوك المقدار ذو الحدين (نظرية نيوتن)

عند ضرب مقدار ذو حدين وليكن (س + ص) إلى (ن) من العوامل فإننا نلاحظ ما يلى: (بالاستعانة بالنتائج المتحصل عليها سابقاً).

١- الرمز الجبرى (س) يكون له أعلى قوة مقدارها (ن) ونحصل عليها بضرب الرمز (س) فى (ن) من العوامل وتتم بطريقة واحدة أى أن معامل $س^{ن}$ فى هذه الحالة = ١ وهذا يمثل الحد الأول فى المفكوك $(س + ص)^{ن}$

٢- فى المفكوك $(س + ص)^{ن}$ نجد أن الحدود المحتوية على $س^{ن-١}$ يمكن أخذها عن طريق ضرب الرمز الجبرى (س) لأى من (ن-١) من العوامل فى الرمز (ص) مأخوذة منفردة وذلك بطرق عددها $^{ن}ق_{١}$ وعلى ذلك نجد أن الحد الثانى = $س^{ن-١}$ (ص + ص + ص .... إلى ن من العوامل)

وعليه فإن الحد الثانى فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هو $^{ن}ق_{١}\ س^{ن-١}\ ص^{١}$

٣- فى ذات المفكوك نجد أن الحدود المحتوية على $س^{ن-٢}$ يمكن أخذها عن طريق ضرب الرمز الجبرى (س) لأى من (ن-٢) من العوامل فى الرمز (ص) مأخوذة مثنى مثنى وذلك بطرق عددها $^{ن}ق_{٢}$ وعليه فإن الحد

الثالث = $س^{ن-٢}$ × (ص ص + ص ص + ...) ويكون بذلك الحد الثالث في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ = $^{ن}ق_{٢}$ $س^{ن-٢}$ $ص^{٢}$

وهكذا نجد أن الحدود المحتوية على $س^{ن-٣}$ يمكن أخذها عن طريق ضرب الرمز الجبرى (س) لأى من (ن-٣) من العوامل فى الرمز (ص) مأخوذة ثلاثة ثلاثة ويكون ذلك بطرق عددها $^{ن}ق_{٣}$ وعليه فإن الحد الثالث فى المفكوك = $س^{ن-٣}$ (ص ص ص + ص ص ص + ص ص ص + ...) أى بأخذ الشكل $^{ن}ق_{٣}$ $س^{ن-٣}$ $ص^{٣}$ ، وهكذا نحصل على باقى الحدود.

وعموماً فإن مفكوك نظرية ذات الحدين (نظرية نيوتن) عند ن عدد صحيح موجب فى مفكوك (س + ص) هى :

الحد الأول = $س^{ن}$ ، الحد الثانى = $^{ن}ق_{١}$ ص $س^{ن-١}$

الحد الثالث = $^{ن}ق_{٢}$ $ص^{٢}$ $س^{ن-٢}$ ،

الحد الرابع = $^{ن}ق_{٣}$ $ص^{٣}$ $س^{ن-٣}$ ،

الحد الخامس = $^{ن}ق_{٤}$ $ص^{٤}$ $س^{ن-٤}$

ويكون بذلك :

الحد الأخير = $^{ن}ق_{ن}$ $ص^{ن}$ $س^{ن}$ = $ص^{ن}$

وهنا نكتب الملاحظات التالية:

(أ) عدد الحدود دائماً يزيد واحد صحيح عن قيمة ن أى = ن + ١

فعند ن = ٥ يوجد لدينا ستة حدود وأيضاً عند ن = ٢٠ يكون لدينا إحدى وعشرون حداً.

(ب) أكبر قوة للرمز الجبرى (س) تكون عند حدها الأول وتساوى وتكون أدنى قوة لنفس الرمز عند الحد الأخير حيث = صفر ومن حد إلى الذى

يليه تقل هذه القوة بمقدار واحد صحيح أى أن قوى (س) تنازلية ولها الترتيب التالى:

(ن ، ن-١ ، ن-٢ ، ن-٣ ، .... (ن-ن).

(جـ) أصغر قوة للرمز الجبرى (ص) تكون عند حدها الأول وتساوى (ن-ن) أى = صفر وتكون أعلى قوة لنفس الرمز عند الحد الأخير حيث = ن ومن حد إلى الذى يليه تزيد هذه القوة بمقدار واحد صحيح أى أن قوى (ص) تصاعديه وهى بذلك تكون بعكس قوى (س) التنازلية وهى كما يلى:

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ن).

(د) دائماً عند مستوى الحد الواحد = قوة (س) + قوة (ص) = ن

فمثلاً عند الحد الرابع نجد: قوة (س) = ن - ٣

قوة (ص) = ٣

وبذلك فإن: قوة (س) + قوة (ص) = (ن - ٣) + ٣ = ن

وهنا نقول أن جميع الحدود من درجة (ن).

(هـ) المعاملات العددية لحدود نظرية ذات الحدين تأخذ الترتيب التالى:

($^{ن}ق_{٠}$ ، $^{ن}ق_{١}$ ، $^{ن}ق_{٢}$ ، $^{ن}ق_{٣}$ .... $^{ن}ق_{ن}$)

(و) عدد التراتيب المأخذوة توافقياً تقل فى حجمها واحد صحيح عن ترتيب الحد فإذا أخذت مثنى مثنى يكون ذلك فى الحد الثالث وإذا أخذت مفردة يكون ذلك عند الحد الثانى وهكذا.

وعلى ذلك فإن مفكوك نظرية ذات الحدين يأخذ الشكل العام التالى:

$$(س + ص)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, ص\, س^{ن-١} +$$

$${}^{ن}ق_{٢}\, ص^{٢}\, س^{ن-٢} + \ldots\ldots + {}^{ن}ق_{ن}\, ص^{ن}\, س^{ن-ن} \quad \text{أى } ص^{ن}$$

الحد العام فى المفكوك

يمكن صياغة حد عام ترتيبه $(ر + ١)$ وذلك باستخدام الملاحظات السابقة على النحو التالى: $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, (\text{الثانى})^{ر}\, (\text{الأول})^{ن-ر}$

حيث الثانى هو الرمز الجبرى الثانى فى المقدار ذى الحدين والأول يقصد به الرمز الجبرى الأول فى ذات المقدار.

فإذا فرضنا $(س + أ)^{٥}$ فإن الحد الثالث باستخدام فكرة الحد العام يكون بوضع $ر = ٢$ ويكون $ح_{٣} = {}^{٥}ق_{٢}\, أ^{٢}\, س^{٥-٢} = ١٠\, أ^{٢}\, س^{٣}$.

ويستخدم بذلك الحد العام لإيجاد كل الحدود المطلوبة فى المفكوك أو فى إيجاد حد معين بالذات.

الحد الأوسط فى المفكوك

قلنا سابقاً أن عدد الحدود يزيد واحد صحيح عن قيمة ن وعلى ذلك فهنا يجب أن نميز بين حالتين:

(أ) عند (ن) زوجية:

يكون لدينا عدد فردى من الحدود وحد أوسط واحد ترتيبه $(\frac{ن}{٢} + ١)$.

(ب) عدد (ن) فردية

يكون لدينا عدد زوجي من الحدود وحدان أوسطان ترتيبهما

$$\left(\frac{ن + ١}{٢} \text{ ، } \frac{ن + ١}{٢} + ١\right)$$

فإذا أخذنا مفكوك $(س + ص)^{٥}$

هنا نجد أن ن = عدد فردى وعلى ذلك يكون لدينا ٦ حدود.

والحد الأوسط الأول ترتيب = $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣ والذى يليه = ٤

∴ $ح_{٣}$ (فى مفكوك $(س + ص)^{٥}$) = $^{٥}ق_{٢}$ $ص^{٢}$ $س^{٣}$ = ١٠ $ص^{٢}$ $س^{٣}$

$ح_{٤}$ (فى مفكوك $(س + ص)^{٥}$) = $^{٥}ق_{٣}$ $ص^{٣}$ $س^{٢}$ = ١٠ $ص^{٣}$ $س^{٢}$

(راجع المثال بالطريقة العادية)

وإذا كان لدينا $(س + ص)^{٤}$ نجد هنا أن ن زوجية وبالتالى لدينا عدد فردى من الحدود = (٤+١) = ٥ وحد أوسط واحد ترتيبه = $\left(\frac{٤}{٢}+١\right)$ = ٣

إذن: الحد الأوسط فى المفكوك ($ح_{٣}$) نجد أن ر = ٢

إذن: $ح_{٣}$ = $^{٤}ق_{٢}$ $ص^{٢}$ $س^{٢}$ = ٦ $ص^{٢}$ $س^{٢}$

مفكوك $(س - ص)^{ن}$ بوضع (- ص) فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ بدلاً من (ص)

نلاحظ:

$(س - ص)^{ن}$ = $س^{ن}$ + $^{ن}ق_{١}$ $(-ص)^{١}$ $(س)^{ن-١}$ +

$^{ن}ق_{٢}$ $(-ص)^{٢}$ $(س)^{ن-٢}$ + $^{ن}ق_{٣}$ $(-ص)^{٣}$ $(س)^{ن-٣}$ + ...

+ $(-\text{ص})^{\text{ن}}$ ، وهذا يعنى أن الحدود سوف تتبادل الاشارات بادئة بالموجب للحد الأول وإذا كانت ن فردية فإن إشارة الحد الأخير ستكون سالبة بالطبع أما إذا كانت (ن) زوجية فإن إشارة الحد الأخير ستكون بالموجب.

فالحد الأخير فى مفكوك $(\text{س} - \text{ص})^{١٠} = \text{ص}^{١٠}$

كما أن الحد الأخير فى مفكوك $(\text{س} - \text{ص})^{٩} = -\text{ص}^{٩}$

وعموماً فإننا نقول أن الحدود الفردية لها إشارة موجبة أما الحدود الزوجية فيكون لها إشارة سالبة.

أبسط صورة لنظرية ذات الحدين:

فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ عند وضع س = ١ ، ص = س نجد أن :

$$(١ + \text{س})^{\text{ن}} = (١)^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,(\text{س})^{١}\,(١)^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,(\text{س})^{٢}\,(١)^{\text{ن}-٢} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,(\text{س})^{\text{ن}}$$

$$(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + \text{ن س} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-١)}{٢ \times ١}\,\text{س}^{٢} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$$

ويمكن استنتاج أن:

$$(١ - \text{س})^{\text{ن}} = ١ - \text{ن س} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-١)}{٢ \times ١}\,\text{س}^{٢} - \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$$

(عند ن زوجية)

$$(١ - \text{س})^{\text{ن}} = ١ - \text{ن س} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)}{٢ \times ١}\,\text{س}^{٢} - \ldots\ldots\ldots - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$$

(عند ن فردية)

ويكون الحد العام هنا = $^{ن}ق_{ر}$ $س^{ر}$

النسبة بين حدين:

في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ نجد أن:

$ح_{ر+١} = {^{ن}ق_{ر}}\, ص^{ر}\, س^{ن-ر}$

$ح_{ر} = {^{ن}ق_{ر-١}}\, ص^{ر-١}\, س^{ن-ر+١}$

وبالقسمة نجد ما يلي:

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{{^{ن}ق_{ر}}\, ص^{ر}\, س^{ن-ر}}{{^{ن}ق_{ر-١}}\, ص^{ر-١}\, س^{ن-ر+١}}$$

$$= \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ص}{س}$$

وهذا يعني أنه عند مفكوك $(س + ص)^{٥}$ نلاحظ أن:

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٥ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \left(\frac{ص}{س}\right)$$

بعض الأمثلة العامة:

مثال(١)

أكتب مفكوك $(س + ٣ص)^{٤}$

الحل:

هنا يمكن استخدام نظرية نيوتن مباشرة:

$(س + ٣ص)^{٤} = س^{٤} + {^{٤}ق_{١}}\, (٣ص)^{١}\, (س)^{٣} +$

^{4}ق$_{2}$ (٣ص)^{2} (س)^{2} + ^{4}ق$_{3}$ (٣ص)^{3} (س)^{1} +

^{4}ق$_{4}$ (٣ص)^{4} (س)^{0}

= س^{4} + ١٢ ص س^{3} + ٥٤ ص^{2} س^{2} +

١٠٨ ص^{3} س + ٨١ ص^{4}

مثال(٢)

أوجد الحد الأوسط فى المثال السابق.

الحل:

حيث أن ن = ٤ هذا يعنى وجود خمسة حدود للمفكوك وحد أوسط

واحد ترتيبه $(\frac{ن}{2} + 1) = (\frac{4}{2} + 1) = 3$ أى ح$_{3}$

حيث نجد أن ر = ٢ وعليه نجد (ح$_{3}$) = ^{4}ق$_{2}$ (٣ص)^{2} (س)^{2}

= ٥٤ ص^{2} س^{2}

مثال(٣)

فى المثال الأول ماذا يكون المفكوك بوضع (−٣ص) بدلاً من (٣ص).

الحل:

(س − ٣ص)^{4} = س^{4} +(^{4}ق$_{1}$)(−٣ص)^{1} (س)^{3} +(^{4}ق$_{2}$) (−٣ص)^{2} (س)^{2} +

^{4}ق$_{3}$ (−٣ص)^{3} (س)^{1} + ^{4}ق$_{4}$ (−٣ص)^{4} (س)^{0}

= س^{4}−١٢ ص س^{3}+٥٤ ص^{2}س^{2}−١٠٨ص^{3}س+٨١ ص^{4}

مثال(٤)

في مفكوك $(أ + ع)^{١٧}$ أوجد الحد الخامس

الحل:

هنا نستخدم فكرة الحد العام أى $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ $(الثانى)^{ر}$ $(الأول)^{ن-ر}$

إذن: $ح_{٥}$ نجد أن $ر = ٤$

وعليه : $ح_{٥} = {}^{١٧}ق_{٤}$ $(ع)^{٤}$ $(أ)^{١٣}$

$$= \frac{١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} (ع)^{٤} (أ)^{١٣}$$

$= ٢٣٨٠$ $ع^{٤}$ $أ^{١٣}$

مثال(٥)

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(٢س - \frac{١}{س})^{٥}$ ومعامله

بتطبيق فكرة الحد العام نجد أن ر = ٣ أى تقل واحد عن ترتيب الحد.

إذن: $ح_{٤} = {}^{٥}ق_{٣}$ $(-\frac{١}{س})^{٣}$ $(٢س)^{٢}$

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times - س^{-٣} \times ٤ س^{٢}$$

وبالاختصار نجد أن:

$ح^{٤} = - ٤٠$ $(\frac{١}{س})$ ومعامله $- ٤٠$

مـثـال(٦)

أكتـب مفكـوك (س + ص)٥ + (س − ص)٥ واسـتنتج حـاصل طرحهما.

الحل:

مفكـوك $(س + ص)^{٥} = س^{٥} + {}^{٥}ق_{١}\, ص\, س^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}\, ص^{٢}\, س^{٣} + {}^{٥}ق_{٣}\, ص^{٣}\, س^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}\, ص^{٤}\, س + {}^{٥}ق_{٥}\, ص^{٥}$

أيضاً:

مفكوك $(س - ص)^{٥} = س^{٥} - {}^{٥}ق_{١}\, ص\, س^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}\, ص^{٢}\, س^{٣} - {}^{٥}ق_{٣}\, ص^{٣}\, س^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}\, ص^{٤}\, س - {}^{٥}ق_{٥}\, ص^{٥}$

وعليه فإن :

$(س + ص)^{٥} + (س - ص)^{٥} = ٢س^{٥} + ٢٠ص^{٢}\, س^{٣} + ١٠\, ص^{٤}\, س$

ويمكن استنتاج أن:

$(س + ص)^{٥} - (س - ص)^{٥} = ١٠\, ص\, س^{٤} + ٢٠\, ص^{٣}\, س^{٢} + ٢ص^{٥}$

مـثـال(٧)

أوجد معامل س٥ فى مفكوك $(س + ص)^{٧}$

الحل:

بما أن $ح_{ر+١} = {}^{٧}ق_{ر}\, ص^{ر}\, (س)^{٧-ر}$ وهنا نجد أنه عند $س^{٥}$ لابد أن $ر = ٢$.

وهذا يعنى أن $ح_{٣} = {}^{٧}ق_{٢}\, ص^{٢}\, س^{٥}$

وعليه فإن المعامل $= \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} = ٢١$

وهو معامل الحد الثالث حيث يوجد س٥

مـثـال(٨)

أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك

$$\left(\text{٢ س} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{١٥}}$$

الحل:

نفرض أن الحد الخالى من (س) هو الحد العام والذى ترتيبه (ر+١)

$$\text{إذن: } \text{ح}_{\text{ر+١}} = {}^{\text{١٥}}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{-١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{ر}} (\text{٢س})^{\text{١٥-ر}}$$

$\text{ح}_{\text{ر+١}}$ = الحد الخالى من س = $^{\text{١٥}}\text{ق}_{\text{ر}}\ (\text{-١})^{\text{ر}}\ (\text{س})^{\text{-٢ر}}\ (\text{٢س})^{\text{١٥-ر}}$

وكلنا نعرف أن الحد الخالى من (س) يكون عندما قوة (س) = صفر

إذن: -٢س + ١٥ - س = صفر وذلك عندما ر = ٥

وعلى ذلك فالحد الخالى من (س) هو الحد السادس

= $^{\text{١٥}}\text{ق}_{\text{٦}}\ (\text{-١})^{\text{٦}}$ = ٥٠٠٥

مـثـال(٩)

أكتب مفكوك $(\text{١+ س})^{\text{١٠}}$ واستخدمه فى إيجاد $(\text{١,٠٣})^{\text{١٠}}$

الحل:

$(\text{١ + س})^{\text{١٠}}$ = ١ + ١٠س + ٤٥ $(\text{س})^{\text{٢}}$ + ١٢٠ $(\text{س})^{\text{٣}}$ + ٢١٠ $(\text{س})^{\text{٤}}$ +

٢٥٢ $(\text{س})^{\text{٥}}$ + ٢١٠ $(\text{س})^{\text{٦}}$ + ١٢٠ $(\text{س})^{\text{٧}}$ + ٤٥ $(\text{س})^{\text{٨}}$ +

١٠ $(\text{س})^{\text{٩}}$ + $(\text{س})^{\text{١٠}}$

ويوضع (س = ٠,٠٣) نحصل على ما يلى:

(١,٠٣)^{١٠} = (١ + ٠,٠٣)^{١٠} = ١ + ١٠ (٠,٠٣) + ٤٥ (٠,٠٣)^{٢} + ١٢٠

(٠,٠٣)^{٣} + ٢١٠ (٠,٠٣)^{٤} + ٢٥٢ (٠,٠٣)^{٥} +

٢١٠ (٠,٠٣)^{٦} + ١٢٠ (٠,٠٣)^{٧} + ٤٥ (٠,٠٣)^{٨} +

١٠ (٠,٠٣)^{٩} + (٠,٠٣)^{١٠}

= ١,٣٤٣٩١٦

مــثـــال(١٠)

أكتب مفكوك (١− س)^{١٠} واستخدمه فى إيجاد (٠,٩٧)^{١٠}

الحل:

مفكوك (١− س)^{١٠} = ١ − ١٠ س + ٤٥ (س)^{٢} − ١٢٠ (س)^{٣} +

٢١٠ (س)^{٤} − ٢٥٢ (س)^{٥} + ٢١٠ (س)^{٦} −

١٢٠ (س)^{٧} + ٤٥ (س)^{٨} − ١٠ (س)^{٩} + (س)^{١٠}

وبوضع س فى المفكوك = ٠,٠٣ نحصل على :

(٠,٩٧)^{١٠} = (١ − ٠,٠٣)^{١٠} = ١ − ١٠ (٠,٠٣) + ٤٥ (٠,٠٣)^{٢} −

١٢٠ (٠,٠٣)^{٣} + ٢١٠ (٠,٠٣)^{٤} − ٢٥٢ (٠,٠٣)^{٥} +

٢١٠ (٠,٠٣)^{٦} − ١٢٠ (٠,٠٣)^{٧} + ٤٥ (٠,٠٣)^{٨} −

١٠ (٠,٠٣)^{٩} + (٠,٠٣)^{١٠}

= ٠,٧٣٧٤٢٤

ويلاحظ أنه فى كل من المثال التاسع والعاشر يوجد لدينا عدد محدد من الحدود ومقداره إحدى عشر حداً.

ثانياً: نظرية ذات الحدين عندما |ن| < ١

من السابق كتبنا

$$(١+س)^{ن} = ١ + ن\,س + \frac{ن\,(ن-١)}{٢ \times ١}(س)^{٢} + \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)}{٣ \times ٢ \times ١}(س)^{٣} + \dots\dots + س^{ن}$$

وهذا يكون صحيحاً عند جميع قيم (ن) بشرط |س| الواحد المطلق.

وعلى ذلك يمكن استخدام فكرة هذا المفكوك عندما (ن) تكون عدد كسرى أقل من الواحد الصحيح الموجب.

$$\left(\frac{١}{٢}\ ،\ \frac{١}{٤}\ ،\ \frac{١}{٨}\ ،\ \frac{٣}{١٩}\ ،\ \frac{١}{٥}\ ،\ \frac{١}{٦}\ .....\right)$$

وعلى ذلك فإن:

$$\text{مفكوك } (١+س)^{\frac{١}{٢}} = ١ + \frac{١}{٢}(س) + \frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}-١\right)}{٢ \times ١}(س)^{٢} + \frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}-١\right)\left(\frac{١}{٢}-٢\right)}{٣ \times ٢ \times ١}(س)^{٣} \ ..... \ \infty$$

إلى ما لا نهاية من الحدود بشرط |س| < من الواحد المطلق.

كذلك فإن:

$$(1-س)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(س) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\times 1}(س)^{2} -$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\times 2\times 1}(س)^{3} \ldots\ldots \infty$$

أى إلى ما لا نهاية من الحدود بشرط | س | من الواحد المطلق.

ويمكن استخدام الشكل السابق فى إيجاد بعض القيم تحت الجذر بشرط إمكانية وضعها فى الصيغ الرياضية السابقة.

فعلى سبيل المثال:

$\sqrt{1,03}$ يمكن كتابته على الشكل $(1 + 0,03)^{\frac{1}{2}}$

وهنا نجد فى مفكوك $(1 + س)^{\frac{1}{2}}$ أى أن س = ٠,٠٣ ، ن = $\frac{1}{2}$

ويكون التطبيق على النحو التالى:

$$\sqrt{1,03} = (1 + 0,03)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(0,03) +$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\times 1}(0,03)^{2} +$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\times 2\times 1}(0,03)^{3} +$$

$$\frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}-١\right)\left(\frac{١}{٢}-٢\right)\left(\frac{١}{٢}-٣\right)}{٤\times٣\times٢\times١}\,(٠,٠٣)^{٤}+\ldots\ldots\infty)$$

$$=١,٠١٤٩$$

وهنا نحصل على قيمة الجذر التربيعى إلى أربعة أرقام عشرية وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد ٠,٩٧ حيث يمكن وضع الجذر على شكل $(١-٠,٠٣)^{\frac{١}{٢}}$ ونطبق الصيغة الرياضية الثانية وعليه فإن:

$$\sqrt{٠,٩٧}=(١-٠,٠٣)^{\frac{١}{٢}}=١-\frac{١}{٢}(٠,٠٣)+$$

$$\frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}-١\right)}{٢\times١}(٠,٠٣)^{٢}-\frac{\left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}-١\right)\left(\frac{١}{٢}-٢\right)}{٣\times٢\times١}(٠,٠٣)^{٣}$$

$$+\frac{\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}-١\right)\left(\frac{١}{٢}-٢\right)\left(\frac{١}{٢}-٣\right)}{٤\times٣\times٢\times١}(٠,٠٣)^{٤}+\ldots\ldots\infty$$

$$=٠,٩٨٤٩$$

وهنا نحصل على قيمة الجذر التربيعى مقرباً إلى أربعة أرقام عشرية فقط.

ثالثاً: عندما (ن) عدداً صحيحاً سالباً:

فى مفكوك $(١+س)^{ن}$ عند | س | < الواحد المطلق بوضع ن = −١ نجد أن:

$$(١ + س)^{-١} = ١ - س + \frac{-١ (-١ - ١)}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{-١ (-١ - ١) (-١ - ٢)}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... \infty$$

$$= ١ - س + س^{٢} - س^{٣} + ... \infty$$

وأيضاً نجد:

$$(١ - س)^{-١} = ١ + س + \frac{-١ (-١ - ١)}{٢ \times ١} (س^{٢}) + \frac{-١ (-١ - ١) (-١ - ٢)}{٣ \times ٢ \times ١} (س^{٣}) .... \infty$$

$$= ١ + س + س^{٢} + س^{٣} + س^{٤} + ... \infty$$

كما أنه يمكن كتابة ما يلى:

$$(١ + س)^{-٥} = ١ - ٥س + \frac{-٥ (-٥ - ١)}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{-٥ (-٥ - ١) (-٥ - ٢)}{٣ \times ٢ \times ١} (س^{٣}) ....$$

$$= ١ - ٥س + ١٥س^{٢} - ٣٥س^{٣} + ... \infty$$

وأيضاً على سبيل المثال فإن:

$$\frac{١}{(١ + س)^{٢}} = (١ + س)^{-٢}$$

وبوضع ن = -٢ فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ عندما | س | < الواحد المطلق فإن:

$$\frac{1}{(1+س)^{2}} = (1+س)^{-2} = 1 - 2س + \frac{-2(-2-1)}{2\times1}(س)^{2}$$

$$+ \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3\times2\times1}س^{3} + ... \infty$$

مـثـال(11)

باستخدام مفكوك $(1-س)^{ن}$ أكتب مفكوك $\frac{1}{(1-س)^{6}}$ وما هو شرط صحة هذا المفكوك؟

الحل:

$\frac{1}{(1-س)^{6}} = (1-س)^{-6}$ وبوضع ن = -6 فى مفكوك $(1-س)^{ن}$ نجد:

$$(1-س)^{-6} = 1 + 6س + \frac{-6(-6-1)}{2\times1}س^{2} +$$

$$\frac{-6(-6-1)(-6-2)}{3\times2\times1}(س)^{3} + ... \infty$$

$$= 1 + 6س + 21س^{2} + 56س^{3} + ... \infty$$

إلى ما نهاية من الحدود. عندما | س | < الواحد المطلق

مـثـال(12)

باستخدام نظرية ذات الحدين أكتب $ح_{3}$ فى $(2أ + 3ب + 4حـ)^{4}$

هنا يمكن كتابة $(2أ + 3ب + 4حـ)^{4}$ كالآتى:

[٢أ + (٣ب + ٤ حـ)]^{٤}

أى أن الأول = ٢أ

والثانى = (٣ب + ٤حـ)

وعليه فإن ح$_{٣}$ = ^{٤}ق$_{٢}$ (٣ب +٤حـ)^{٢} (٢أ)^{٢}

= ٦ (٩ب^{٢} + ٢٤ ب حـ + ٣٦ حـ^{٢}) (٤ أ^{٢})

= ٢١٦ أ^{٢} ب + ٥٧٦ أ^{٤} ب حـ + ٦٢٤ أ^{٢} حـ^{٢}

وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد كل حدود المفكوك.

الباب الرابع

الأعـــداد الطبيعية والمجاميع

Natural Numbers and Summations

تعرف فئة الأعداد الصحيحة الموجبة التى تبدأ من ١ إلى ن أى ١، ٢، ٣، ٤، ...، ن بالأعداد الطبيعية، وتعرف المتسلسة $١^{\text{ر}}$ ، $٢^{\text{ر}}$ ، $٣^{\text{ر}}$ ، ... ، $\text{ن}^{\text{ر}}$ بقوى الأعداد الطبيعية حيث أنه .

بوضع ر = ١	نصل إلى الأعداد الطبيعية
وبوضع ر = ٢	نصل إلى مربعات الأعداد الطبيعية
وبوضع ر = ٣	نصل إلى مكعبات الأعداد الطبيعية

وهكذا وسوف نهتم هنا بكيفية إيجاد مجموع قوى الأعداد الطبيعية بالإضافة إلى بعض التطبيقات.

بعض القواعد الخاصة بالمجاميع:

اذا كان لدينا عدة قيم للمتغير $\text{س}_{\text{ر}}$ وهى $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٣}$ ، .... ، إلى $\text{س}_{\text{ن}}$ فإن:

$$(١)\quad \text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{٣} + \dots + \text{س}_{\text{ن}} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}}$$

حيث $\text{س}_{\text{ر}}$ هى قيم للمتغير س ، ن عدد القيم.

ويلاحظ:

أ) $\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} + \text{س}_{\text{ن}+1} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}+1} \text{س}_{\text{ر}}$

ب) $\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{ك}+1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} - \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ك}} \text{س}_{\text{ر}}$

جـ) $\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ك}} \text{س}_{\text{ر}} + \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{ك}+1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}$

(٢) أ + أ + أ + ... ن مرة = ن × أ حيث أ مقدار ثابت

(٣) $\text{أ س}_1 + \text{أ س}_2 + \text{أ س}_3 + ... + \text{أ س}_{\text{ن}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ س}_{\text{ر}}$

$= \text{أ مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}$

(٤) $(\text{س}_1 \pm \text{ص}_1) + ... + (\text{س}_2 \pm \text{ص}_2) + ... + (\text{س}_{\text{ن}} \pm \text{ص}_{\text{ن}})$

$= \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} \pm \text{ص}_{\text{ر}})$

$= \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \pm \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}$ حيث $\text{ص}_{\text{ر}}$ هى قيم لمتغير آخر ص.

ويلاحظ أن:

أ) $\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{أ س}_{\text{ر}} \pm \text{ب ص}_{\text{ر}}) = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \pm \text{ب مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}$

ب) $\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} (\text{س}_{\text{ر}} \pm 1) = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2_{\text{ر}} \pm \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}$

جـ) $\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - 1)(\text{س}_{\text{ر}} + 1) = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2_{\text{ر}} - \text{ن}$

(٥) $(س_١ \pm أ)\ (س_٢ \pm أ) + \dots + (س_ن \pm أ) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س_ر \pm ن \times أ$

(٦) $(س_١ \pm أ)^٢ + (س_٢ \pm أ)^٢ + \dots + (س_ن \pm أ)^٢$

$$= \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ . س^٢_ر \pm ٢أ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س_ر + ن أ^٢$$

(٧) مجموع مربعات قيم س $\neq$ مربع مجموع قيم س أى أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س^٢_ر \neq (\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س_ر)^٢$$

(٨) مجموع حاصل ضرب قيم متغيرين $\neq$ حاصل ضرب مجموع قيم المتغيرين بمعنى أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س_ر ص_ر \neq \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ س_ر \times \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ ص_ر$$

مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن :

الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، .... ، ن

تمثل متوالية عددية حدها الأول أ = ١ وأساسها د = ١ وحدها الأخير = ن ، عدد حدودها ن ، بالتالى يمكن تطبيق قانون المتوالية العددية لإيجاد المجموع

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$$

$$\therefore جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل) = \frac{ن\ (ن+١)}{٢}$$

$$\therefore جـ_ن = ١ + ٢ + ٣ + \dots + ن = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ ر = \frac{ن\ (ن+١)}{٢}$$

مـثـال(١)

أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٢٠

الحل:

$$\text{ن} = ٢٠ \text{ ، } \text{جـ}_{٢٠} = \sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ر}$$

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}\ (\text{ن}+١)}{٢}$$

$$\text{جـ}_{٢٠} = \frac{٢٠\ (٢٠+١)}{٢} = ٢١٠$$

مـثـال(٢)

أوجد المجاميع التالية:

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٤} \text{ر} \text{ ، } \sum_{\text{ر}=١٢}^{١٩} \text{ر} \text{ ، } \sum_{\text{ر}=١}^{٧} (\text{ر}+٣)$$

$$\sum_{\text{ر}=١٠}^{٢٠} (٢\text{ر} - ٦)$$

الحل:

أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{١٤} \text{ر} = \frac{١٤\ (١٤+١)}{٢} = ١٠٥$

ب) $\sum_{\text{ر}=١٢}^{١٩} \text{ر} = \sum_{\text{ر}=١}^{١٩} \text{ر} - \sum_{\text{ر}=١}^{١١} \text{ر}$

$$= \frac{١٩\,(١٩+١)}{٢} - \frac{١١\,(١١+١)}{٢} = ١٩٠ - ٦٦ = ١٢٤$$

ج) $\underset{ر=١}{\overset{٧}{\text{مجـ}}}\,(ر+٣) = \underset{ر=١}{\overset{٧}{\text{مجـ}}}\,ر + \underset{ر=١}{\overset{٧}{\text{مجـ}}}\,(٣)$

$$= \frac{٧\,(٧+١)}{٢} + ٧ \times ٣ = ٤٩$$

د) $\underset{ر=١٠}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\,(٢ر - ٦) = \underset{ر=١٠}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\,٢ر - \underset{ر=١٠}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\,(٦)$

$$= ٢\,[\underset{ر=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\,ر - \underset{ر=١}{\overset{٩}{\text{مجـ}}}\,ر] - (٦)\,[٢٠ - ٩]$$

$$= ٢\,[\frac{٢٠ \times ٢١}{٢} - \frac{٩ \times ١٠}{٢}] - ٦ \times ١١ = ٢٦٤$$

مـثـال(٣)

أوجد الحدين الأخيرين من المتسلسلات التى مجموعها على التوالى

١٢٧٥ ، ٣٢٤٠

الحل:

$\because$ جـ$_ن$ $= \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$

(أ) $\therefore$ $١٢٧٥ = \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$

$\therefore$ $ن^٢$ + ن − ٢٥٥٠ = صفر

$\therefore$ (ن + ٥١) (ن− ٥٠) = صفر

$\therefore$ ن + ٥١ = صفر أى ن = −٥١ مرفوض

أو ن − ٥٠ = صفر أى ن = ٥٠

وبالتالى الحدين الآخرين هما ٤٩ ، ٥٠

(ب) $٣٢٤٠ = \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$

∴ ن (ن +١) = ٦٤٨٠

∴ $ن^٢$ + ن − ٦٤٨٠ = صفر

∴ (ن + ٨١) (ن − ٨٠) = صفر

∴ ن +٨١ = صفر أى أن ن = −٨١ مرفوض

أو ن − ٨٠ = صفر أى أن ن = ٨٠

أى أن الحدين الأخيرين هما ٧٩ ، ٨٠

مـثـال(٤)

أوجد مجموع الأعداد التى لا تقبل القسمة على ٩ فى الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٢٠٠

الحل:

نوجد أولا مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٢٠٠ كما يلى:

$$ح_١ = \sum_{ر=١}^{٢٠٠} ر = \frac{٢٠٠}{٢}\,(٢٠٠ + ١) = ١٥٠ \times ٢٠١ = ٢٠١٠٠$$

ثم نوجد مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمه على ٩ من ١ إلى ٢٠٠ كما يلى:

$ح_٢$ = ٩ + ١٨ + ٢٧ + ... + ١٩٨

= ٩ (١ + ٢ + ٣ + ... + ٢٢)

$$= 9 \sum_{ر=1}^{22} ر = 9 \left[\frac{22}{2} (22 + 1) \right]$$

$= 2277$

وعلى ذلك فإن مجموع الأعداد الطبيعية التى لا تقبل القسمه على ٩

$= ج_1 - ج_2$

$= 20100 - 2277 = 17823$

. مجموع مربعات الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن:

مربعات الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن هى الأعداد 1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، ...... ، $ن^2$ ومجموع مربعات أول ن حد من الأعداد الطبيعية هو:

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + ن^2 \quad \text{أو}$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$$

ويمكن اثبات القانون السابق على النحو التالى :

افترض أنه لدينا المتطابقة .

$$(1 + س)^3 - س^3 = 1 + 3س + 3س^2$$

وبالتعويض عن س بالقيم ١، ٢، ٣، .... ، ن نحصل على العلاقات الآتية والتى عددها ن.

عند س = ١ $\therefore 2^3 - 1^3 = 1 + 3\times1 + 3\times 1^2$

عند س = ٢ $\therefore 3^3 - 2^3 = 1 + 3\times2 + 3\times 2^2$

عند س = ٣ $\therefore 4^3 - 3^3 = 1 + 3\times3 + 3\times 3^2$... وهكذا حتى نصل إلى ن

عند س = ن $\therefore$ $(ن+١)^٣ - ن^٣ = ١ + ٣ \times ن + ٣ \times ن^٢$

وبجمع هذه العلاقات نحصل على

$$(ن+١)^٣ - ١ = ن + ٣ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر + ٣ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٢$$

$$= ن + \frac{٣}{٢} ن (ن + ١) + ٣ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٢$$

$$\therefore ٣ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٢ = (ن+١)^٣ - (ن+١) - \frac{٣}{٢} ن (ن+١)$$

$$= \frac{١}{٢} (ن+١) [٢ (ن+١)^٢ - ٢ - ٣ ن]$$

$$= \frac{١}{٢} ن (ن+١) (٢ن+١)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٢ = \frac{ن (ن+١) (٢ن+١)}{٦}$$

مـثـال(٥)

أوجد مجموع المتسلسلات التالية :

(أ) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... + ٢٠^٢$

(ب) $٦^٢$ ، $١٢^٢$ ، $١٨^٢$ + ... إلى ٣٠ حداً

(جـ) $٢^٢ + ٤^٢ + ٦^٢ + ... + ١٠٠^٢$

(د) $١^٢ + ٢^٢ - ٤^٢ + ٥^٢ - \dots\dots - ٢٠٠^٢$

(هـ) $٢٠^٢ + ٢٢^٢ + ٢٤^٢ + \dots\dots + ٥٠^٢$

الحل:

(أ) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots\dots + ٢٠^٢ = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر^٢$

$$= \frac{٢٠\,(٢٠ + ١)\,(٢ \times ٢٠ + ١)}{٦} = \frac{٢٠ \times ٢١ \times ٤١}{٦} = ٢٨٧٠$$

(ب) $٦^٢ ، ١٢^٢ ، ١٨^٢ + \dots\dots$ إلى ٣٠ حداً

$$= ٦^٢ [١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots\dots + ٣٠^٢]$$

$$= ٦^٢ \sum_{ر=١}^{٣٠} ر^٢ = ٣٦ \times \frac{٣٠ \times ٣١ \times ٦١}{٦}$$

$$= ٣٤٠٣٨٠$$

(جـ) $٢^٢ + ٤^٢ + ٦^٢ + \dots\dots + ١٠٠^٢$

$$= ٢^٢ [١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots\dots + ٥٠^٢]$$

$$= ٤ \sum_{ر=١}^{٥٠} ر^٢ = ٤ \times \frac{٥٠ \times ٥١ \times ١٠١}{٦} = ١٧١٧٠٠$$

(د) نضع $١^٢ - ٢^٢ + ٣^٢ - ٤^٢ + \dots\dots - ٢٠٠^٢ = جـ$

$\therefore$ $جـ = [١^٢ + ٣^٢ + ٥^٢ + \dots + ١٩٩^٢] - [٢^٢ + ٤^٢ + ٦^٢ + \dots + ٢٠٠^٢]$

$= جـ_١ - جـ_٢$

حيث $جـ_١ = ١^٢ + ٣^٢ + ٥^٢ + \dots + ١٩٩^٢$

$$\text{جـ}_{٢} = ٢^{٢} + ٤^{٢} + ٦^{٢} + \dots + ٢٠٠^{٢}$$

وسوف يتم حساب كل من جـ١ ، جـ٢ على صورة

$$\text{جـ}_{٢} = ٢^{٢} \left[١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \dots + ١٠٠^{٢} \right]$$

$$= ٤ \;\text{مجـ}_{ر=١}^{١٠٠} ر^{٢} = ٤ \times \frac{١٠٠ \times ١٠١ \times ٢٠١}{٦} = ١٣٥٣٤٠٠$$

$$\text{جـ}_{١} = \left[١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \dots + ١٩٩^{٢} \right] - \left[٢^{٢} + ٤^{٢} + ٦^{٢} + \dots + ١٩٨^{٢} \right]$$

$$= \text{مجـ}_{ر=١}^{١٩٩} ر^{٢} - ٢^{٢} \left[١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \dots + ٩٩^{٢} \right]$$

$$= \frac{١٩٩ \times ٢٠٠ \times ٣٩٩}{٦} - ٤ \times \frac{٩٩ \times ١٠٠ \times ١٩٩}{٦}$$

$$= ٢٦٤٦٧٠٠ - ١٣١٣٤٠٠ = ١٣٣٣٣٠٠$$

$$\therefore \text{جـ} = ١٣٣٣٣٠٠ - ١٣٥٣٤٠٠ = -٢٠١٠٠$$

(هـ) $٢٠^{٢} + ٢٢^{٢} + ٢٤^{٢} + \dots\dots + ٥٠^{٢}$

$$= ٢^{٢} \left[١٠^{٢} + ١١^{٢} + ١٢^{٢} + \dots\dots + ٢٥^{٢} \right]$$

$$= ٤ \;\text{مجـ}_{ر=١٠}^{٢٥} ر^{٢} = ٤ \left[\text{مجـ}_{ر=١}^{٢٥} ر^{٢} - \text{مجـ}_{ر=١}^{٩} ر^{٢} \right]$$

$$= ٤ \left[\frac{٢٥ \times ٢٦ \times ٥١}{٦} - \frac{٩ \times ١٠ \times ١٩}{٦} \right] = ٢٠٩٦٠$$

مثال(٦)

أوجد مجموع المتسلسلات التالية :

(أ) $\underset{ر=٥}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}}(ر^{٢}+٦)$

(ب) $\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}(ر^{٢}+٣ر-٢)$

(جـ) $\underset{ر=١٠}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}(٢ر^{٢}+٣)$

الحل:

(أ) $\underset{ر=٥}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}}(ر^{٢}+٦)=\underset{ر=٥}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}}ر^{٢}+\underset{ر=٥}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}}(٦)$

$=\left[\underset{ر=١}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}}ر^{٢}-\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}ر^{٢}\right]+(١٥-٤)(٦)$

$=\left[\frac{١٥\times١٦\times٣١}{٦}-\frac{٤\times٥\times٩}{٦}\right]+٦٦=١٢٧٦$

(ب) $\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}(ر^{٢}+٣ر-٢)=\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}ر^{٢}+٣\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}ر-\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}(٢)$

$=\frac{١٠\times١١\times٢١}{٦}+٣\times\frac{١٠\times١١}{٢}-١٠\times٢$

$=٣٨٥+١٦٥-٢٠=٥٣٠$

(جـ) $\sum_{\text{ر}=١٠}^{٢٠} (٢\text{ر} + ٣)\,\text{ر}$

$= \sum_{\text{ر}=١٠}^{٢٠} (٢\text{ر}^{٢} + ٣\text{ر})$

$= ٢ \sum_{\text{ر}=١٠}^{٢٠} \text{ر}^{٢} + ٣ \sum_{\text{ر}=١٠}^{٢٠} \text{ر}$

$= ٢ \left[\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ر}^{٢} - \sum_{\text{ر}=١}^{٩} \text{ر}^{٢}\right] + ٣ \left[\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ر} - \sum_{\text{ر}=١}^{٩} \text{ر}\right]$

$= ٢ \left[\frac{٢٠ \times ٢١ \times ٤١}{٦} - \frac{٩ \times ١٠ \times ١٩}{٦}\right]$

$+ ٣ \left[\frac{٢٠ \times ٢١}{٢} - \frac{٩ \times ١٠}{٢}\right]$

$= ٥١٧٠ + ٤٩٥ = ٥٦٦٥$

مثال(٧)

أوجد قيمةن التى تحقق المعادلات التالية :

(أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = ٥٥٢٥$

(ب) $\sum_{\text{ر}=٦}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = ٣٣٠$

الحل:

(أ) $\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ر}^{\text{٢}} = \text{٥٥٢٥}$

$$\therefore \frac{\text{ن (ن+١) (٢ن +١)}}{\text{٦}} = \text{٢٢٥٢}$$

$$\therefore \text{ن (ن+١) (٢ن +١)} = \text{٣٣١٥٠}$$

وبتحليل الطرف الأيسر إلى أبسط صورة إلى ٣ حدود نجد أن

$$\text{ن (ن+١) (٢ن +١)} = \text{٢٥} \times \text{٢٦} \times \text{٥١}$$

$$\therefore \text{ن} = \text{٢٥}$$

(ب) $\sum_{\text{ر}=\text{٦}}^{\text{ن}} \text{ر}^{\text{٢}} = \text{٣٣٠}$

$$\therefore \frac{\text{ن (ن+١) (٢ن +١)}}{\text{٦}} - \frac{\text{٥} \times \text{٦} \times \text{١١}}{\text{٦}} = \text{٣٣٠}$$

$$\therefore \frac{\text{ن (ن+١) (٢ن +١)}}{\text{٦}} - \text{٥٥} = \text{٣٣٠}$$

$$\therefore \frac{\text{ن (ن+١) (٢ن +١)}}{\text{٦}} = \text{٣٨٥}$$

$$\therefore \text{ن (ن+١) (٢ن +١)} = \text{٢٣١٠}$$

وبتحليل الطرف الأيسر إلى الصورة المناسبة للطرف الأيمن نجد أن

$$\therefore \text{ن (ن+١) (٢ن +١)} = \text{١٠} \times \text{١١} \times \text{٢١}$$

$$\therefore \text{ن} = \text{١٠}$$

مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن :

مكعبات الأعداد الطبيعية هى الأعداد $١^٣$ ، $٢^٣$ ، $٣^٣$ ، ..... ، $ن^٣$.

ويمكن ايجاد مجموع مكعبات أول ن حد من الأعداد الطبيعية باستخدام الآتى:

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٣ = [\frac{ن}{٢}(ن+١)]^٢$$

وبالتالى نلاحظ أن مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن يساوى مربع مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن.

ويمكن الوصول إلى الصيغة السابقة لمجموع مكعبات الأعداد الطبيعية باستخدام العلاقة التالية:

$$(س+١)^٤ - س^٤ = ٤س^٣ + ٦س^٢ + ٤س + ١$$

وبالتعويض عن س = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن نجد أن

عند س = ١ $\quad ٢^٤ - ١^٤ = ٤(١)^٣ + ٦(١)^٢ + ٤ × ١ + ١$

عند س = ٢ $\quad ٣^٤ - ٢^٤ = ٤(٢)^٣ + ٦(٢)^٢ + ٤ × ٢ + ١$

عند س = ٣ $\quad ٤^٤ - ٣^٤ = ٤(٣)^٣ + ٦(٣)^٢ + ٤ × ٣ + ١$

وهكذا

عند س = ن-١ $\quad ن^٤ -(ن-١)^٣ = ٤(ن-١)^٣ + ٦(ن-١)^٢ + ٤(ن-١) + ١$

عند س = ن $\quad (ن+١)^٤ - ن^٤ = ٤(ن)^٣ + ٦(ن)^٢ + ٤(ن) + ١$

وبجمع تلك الحدود على الطرفين نجد أن:

$$(ن+١)^٤ - ١ = ٤ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٣ + ٦ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٢ + ٤ \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر + ن$$

وبالتعويض عن مجموع الأعداد الطبيعية ومجموع مربعات الأعداد الطبيعية نجد أن:

$$\text{(ن+١)}^{٤} - ١ = ٤ \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} + ٦ \frac{\text{ن (ن+١) (٢ن+١)}}{٦} + ٤ \frac{\text{ن (ن+١)}}{٢} + \text{ن}$$

$$= ٤ \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} + \text{ن(ن+١)(٢ن+١)} + \text{٢ن(ن+١)} + \text{ن}$$

$$\therefore ٤ \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} = \text{(ن+١)}^{٤} - \text{ن(ن+١)(٢ن+١)} - \text{٢ن(ن+١)} - \text{(ن+١)}$$

$$= \text{(ن+١)}[\text{(ن+١)}^{٣} - \text{ن (٢ن+١)} - \text{(٢ن+١)}]$$

$$= \text{(ن+١)} [\text{(ن+١)}^{٣} - \text{(٢ن+١) (ن+١)}]$$

$$= \text{(ن+١)}^{٢}[\text{ن}^{٢} + \text{٢ن} + ١ - \text{٢ن} - ١] = \text{ن}^{٢} \text{(ن+١)}^{٢}$$

$$\therefore \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} = \frac{\text{ن}^{٢} \text{(ن+١)}^{٢}}{٤}$$

$$= \left[\frac{\text{ن (ن+١)}}{٢}\right]^{٢}$$

مـثـال(٨)

أوجد مجموع ما يلى:

(أ) $\underset{ر=1}{\overset{15}{\text{مجـ}}}\ ر^{3}$ (ب) $\underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ ر\,(ر+1)\,(ر+2)$

(جـ) $\underset{ر=1}{\overset{15}{\text{مجـ}}}\ (ر-1)\,(ر)\,(ر+1)$

الحل:

(أ) $\underset{ر=1}{\overset{15}{\text{مجـ}}}\ ر^{3} = \left(\frac{15 \times 16}{2}\right)^{2} = 14400$

(ب) $\underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ ر\,(ر+1)\,(ر+2) = \underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ (ر^{3} + 3ر^{2} + 2ر)$

$$= \underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ ر^{3} + 3\underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ ر^{2} + 2\underset{ر=1}{\overset{10}{\text{مجـ}}}\ ر$$

$$= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^{2} + 3 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 4290$$

(جـ) $\underset{ر=10}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ (ر-1)\,(ر)\,(ر+1) = \underset{ر=10}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ (ر^{3} - ر)$

$$\underset{ر=10}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ ر^{3} - \underset{ر=10}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ ر = \left[\underset{ر=1}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ ر^{3} - \underset{ر=1}{\overset{9}{\text{مجـ}}}\ ر^{3}\right]$$

$$- \left[\underset{ر=1}{\overset{30}{\text{مجـ}}}\ ر - \underset{ر=1}{\overset{9}{\text{مجـ}}}\ ر\right]$$

$$= \left[\left(\frac{٣٠ \times ٣١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٩ \times ١٠}{٢}\right)^{٢}\right] - \left[\frac{٣٠ \times ٣١}{٢} - \frac{٩ \times ١٠}{٢}\right]$$

$$= [٢١٦٢٢٥ - ٢٠٢٥] - [٤٦٥ - ٤٥]$$

$$= ٢١٤٢٠٠ - ٤٢٠ = ٢١٣٧٨٠$$

مـثـال(٩)

أوجد مجموع المتسلسلات التالية:

(أ) $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots\ldots + ٢٠^{٣}$

(ب) $١١^{٣} + ٢٢^{٣} + ٣٣^{٣} + \ldots\ldots$ إلى ٢٠ حداً

(جـ) مكعبات الأعداد التى لا تقبل القسمة على ١١ والمحصورة بين ١، ٢٢٢

الحل:

(أ) $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots\ldots + ٢٠^{٣} = \underset{ر=١}{\overset{٢٠}{مجـ}} ر^{٣}$

$$= \left(\frac{٢٠ \times ٢١}{٢}\right)^{٢} = ٤٤١٠٠$$

(ب) $١١^{٣} + ٢٢^{٣} + ٣٣^{٣} + \ldots\ldots$ إلى ٢٠ حداً

$$= ١١^{٣}[١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots\ldots \text{ إلى ٢٠ حداً}]$$

$$= ١١^{٣} \underset{ر=١}{\overset{٢٠}{مجـ}} ر^{٣} = ١١^{٣} \times \left(\frac{٢٠ \times ٢١}{٢}\right)^{٢} = ٥٨٦٩٧١٠٠$$

(جـ) مجموع مكعبات الأعداد التى لا تقبل القسمة على ١١ والمحصورة بين ١ ، ٢٢٢

= مجموع الأعداد من ١ إلى ٢٢٢ – مجموع مكعبات الأعداد التى تقبل القسمة على ١١ من ١ إلى ٢٢٢

$$= \text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{٢٢٢} \text{ر}^{٣} - [١١^{٣} + ٢٢^{٣} + ٣٣^{٣} + \dots\dots + ٢٢٠^{٣}]$$

$$= \left(\frac{٢٢٢ \times ٢٢٣}{٢}\right)^{٢} - ١١^{٣} [١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \dots + ٢٠^{٣}]$$

$$= ٥٥٤٠١٣٩١$$

الصورة العامة لمجموع أي درجة من الأعداد الطبيعية:

لو فرضنا أن الحد العام للمجموع هو

$$\text{جـ}_{\text{ر}} = ١^{\text{ر}} + ٢^{\text{ر}} + ٣^{\text{ر}} + \dots\dots \text{ن}^{\text{ر}}$$

حيث ر ، ن أعداداً صحيحة موجبة حيث أن :

$$({}^{\text{ر}+١}\text{ق}_{١})\,\text{جـ}_{١} + ({}^{\text{ر}+١}\text{ق}_{٢})\,\text{جـ}_{٢} + ({}^{\text{ر}+١}\text{ق}_{٣})\,\text{جـ}_{٣} + \dots\dots + ({}^{\text{ر}+١}\text{ق}_{\text{ر}})\,\text{جـ}_{\text{ر}}$$

$$= (\text{ن}+١)^{\text{ر}+١} - (\text{ن}+١)$$

فمثلاً عندما ر = ١ فإن

$\text{ح}_{١} = ١ + ٢ + ٣ + \dots\dots\dots + \text{ن}$ مجموع الأعداد الطبيعية

$\therefore\ {}^{٢}\text{ق}_{١}\,\text{جـ}_{١} = (\text{ن}+١)^{٢} - (\text{ن}+١)$ ومنها نجد أن

$\text{جـ}_{١} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)}{٢} =$ مجموع الأعداد الطبيعية

وعندما ر = ٢ فإن

$ج_{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \ldots\ldots ن^{٢}$ = مجموع مربعات الأعداد الطبيعية

$$\therefore ({}^{٣}ق_{١})\, ج_{١} + ({}^{٣}ق_{٢})\, ج_{٢} = (ن + ١)^{٣} - (ن + ١)$$

ومنها نجد أن :

$$٣\, ج_{١} + ٣\, ج_{٢} = (ن + ١)\, (ن^{٢} + ن)\,.$$

وثم بالتعويض بقيمة $ج_{١} = \frac{ن\,(ن + ١)}{٢}$ وحل المعادلة الناتجة فى $ج_{٢}$ لنحصل على $ج_{٢} = \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١)}{٦}$ = مجموع مربعات الأعداد الطبيعية

وعندما $ر = ٣$

$$({}^{٤}ق_{١})\, ج_{١} + ({}^{٤}ق_{٢})\, ج_{٢} + ({}^{٤}ق_{٣})\, ج_{٣} = (ن + ١)^{٤} - (ن + ١)$$

$$٤\, ج_{١} + ٦\, ج_{٢} + ٤\, ج_{٣} = (ن + ١)\, [(ن+١)^{٣} - ١]$$

بالتعويض بقيمة $ج_{١}$، $ج_{٢}$ وحل المعادلة الناتجة فى $ج_{٣}$ نحصل على مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية وهى :

$$ج_{٣} = ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots\ldots ن^{٣} = \left[\frac{ن\,(ن + ١)}{٢}\right]^{٢}$$

وهكذا يمكن ايجاد مجموع أى درجة من الأعداد الطبيعية.

$$ج_{٤} = ١^{٤} + ٢^{٤} + ٣^{٤} + \ldots\ldots ن^{٤} = \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٤}$$

$$= \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١)\,(٣ن^{٢} + ٣ن - ١)}{٣٠}$$

$$\text{ج}_{٥} = ١ + ٢^{٥} + ٣^{٥} + \ldots\ldots \text{ن}^{٥} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٥}$$

$$= \frac{\text{ن}^{٢}}{١٢} (\text{ن} + ١)^{٢} (٢\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن} - ١)$$

$$\text{ج}_{٦} = ١ + ٢^{٦} + ٣^{٦} + \ldots\ldots \text{ن}^{٦} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٦}$$

$$= \frac{\text{ن}}{٤٢} (\text{ن} + ١) (٢\text{ن} + ١) (٣\text{ن}^{٤} + ٦\text{ن}^{٣} - ٣\text{ن} + ١)$$

$$\text{ج}_{٧} = ١^{٧} + ٢^{٧} + ٣^{٧} + \ldots\ldots \text{ن}^{٧} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٧}$$

$$= \frac{\text{ن}^{٢}}{٢٤} (\text{ن} + ١)^{٢} (٣\text{ن}^{٤} + ٦\text{ن}^{٣} - \text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ٢)$$

$$\text{ج}_{٨} = ١^{٨} + ٢^{٨} + ٣^{٨} + \ldots\ldots \text{ن}^{٨} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٨}$$

$$= \frac{\text{ن}}{٩} (\text{ن} + ١)(٢\text{ن} + ١)(٥\text{ن}^{٦} + ١٥\text{ن}^{٥} + ٥\text{ن}^{٤} - ١٥\text{ن}^{٣} - \text{ن}^{٢} + ٩\text{ن} - ٣)$$

$$\text{ج}_{٩} = ١^{٩} + ٢^{٩} + ٣^{٩} + \ldots\ldots \text{ن}^{٩} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٩}$$

$$= \frac{\text{ن}^{٣}}{٢٠} (\text{ن} + ١)^{٢} (٢\text{ن}^{٦} + ٦\text{ن}^{٥} + \text{ن}^{٤} - ٨\text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} + ٦\text{ن} - ٣)$$

الباب الخامس

المتواليات والمتسلسلات

Progressions and series

الفصل الأول: المتواليات العددية والهندسية

إذا كان لدينا أعداد تتوالى بأسلوب معين قانون ما أو قاعدة معلومة يقال بأنها متسلسله فمثلا:

٢، ٤، ٦ واضح أن الأعداد تتزايد بمقدار ٢ ويمكن التنبؤ بالأعداد التاليه بسهولة ٨، ١٠، ١٢ وهكذا فيقال أنها متسلسله وكذلك يقال للأعداد التاليه بأنها متسلسله:

١ × ٢ ، ٢ × ٣ ، ٣ × ٤ ، حيث أن كل مقدار (أو نقول كل حد) يتكون من عددين مضروبين فى بعضها فالحد الأول عبارة عن ١ × ٢

والثانى ٢ × ٣ والثالث ٣ × ٤

فيمكن التنبؤ بالحد الرابع بسهوله - حاول أن تصل إلى قيمه الحد الرابع قبل الاستمرار فى القراءة:

والحد الرابع ٤ × ٥ والحد الخامس ٥ × ٦

وهكذا ،

وأيضاً يقال للأعداد التالية بأنها متسلسله: $\frac{١}{٢^٢}$ ، $\frac{١}{٣^٢}$ ، $\frac{١}{٤^٢}$

حيث أن كل مقدار يتكون من بسط ومقام فالبسط فـى جميـع الأحـوال عباره عن واحد أما المقام فهو عبارة عن ٢^{٢} ، ٣^{٢} ، ٤^{٢} وعلى ذلك أن نصل إلى المقادير المتتاليه بسهولة، حاول أن تقـوم بعمـل ذلـك قبل الاستمرار فـى القراءة.

وكما سنشرح فيما بعد فـإن كـل مـن المتواليـات العدديـه والمتواليـات الهندسيه يعتبران حالات خاصة من المتسلسلات.

المتواليات العددية:

يقال لمجموعه من الأرقـام بأنهـا تـأخذ شـكل متواليـه عدديـه إذا كـان الفرق بين أى رقم (فيما عدا الرقم الأول) والرقم السـابق لـه مباشـرة يسـاوى مقدار ويسمى ذلك المقدار الثابت بأنه أساس المتواليه

فمثلا ٥، ٧، ٩، ١١، ....

بأنها متواليه عدديه حيث أن الفرق بين كل مقدار والمقدار السابق لـه عباره عن مقدار ثابت هو ٢ حيث:

٧ - ٥ = ٢

، ٩ - ٧ = ٢

، ١١ - ٩ = ٢

ويطلق على الفـرق الثابت وهو فـى مثالنـا السـابق ٢ بأنـه أسـاس المتواليـه، ويصير الرقم ٥ بأنه الحد الأول من المتواليه

، ٧ بأنه الحد الثانى من المتواليه

، ٩ بأنه الحد الثالث من المتواليه .... وهكذا كذلك ...

٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ ، .....

بأنها متواليه عدديه نظرا لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له عبارة عن مقدار ثابت حيث الحد الثانى ناقص الحد الأول يساوى ٥

أى ٣٥ - ٣٠ = ٥ ، ٤٠ - ٣٥ = ٥

وعلى ذلك فإن أساس المتواليه هو ٥ وبمعرفه أساس المتواليه يمكن ايجاد الحدود التاليه للمتواليه وذلك باضافة الرقم ٥ إلى كل حد حتى يصل إلى الحد التالى له مباشرة.

ففى مثالنا السابق نجد أن:

الحد الأول هو ٣٠ فإذا أضفنا إليه (٥) نصل:

إلى الحد الثانى وهو ٣٥ (أى ٣٠ + ٥) وبالتالى فإن:

الحد الثالث هو ٤٠ (أى ٣٥ + ٥)

والحد الرابع هو ٤٥ (أى ٤٠ + ٥)

وهكذا ...

ويقال للأعداد التاليه بأنها متواليه عدديه ...

٩٠ ، ٨٠ ، ٧٠ ، ٦٠ ، ٥٠

حيث الفرق بين كل حد والحد السابق له = -١٠

أى ٨٠ - ٩٠ = -١٠ ، ٧٠ - ٨٠ = -١٠

، ٦٠ - ٧٠ = -١٠ وهكذا

وعلى ذلك يقال أن الحد الأول فى المتواليه العددية السابقه هو ٩٠

وأساس المتواليه هو -١٠

والحد الأخير هو ٥٠

وإذا كان معلوما لدينا الحد الأول للمتواليه العدديه

والأساس

والحد الأخير

فإنه بسهوله يمكن كتابه المتواليه لعدديه

فمثلا إذا كان الحد الأول للمتواليه العدديه هو ١٠

والأساس ٣

والحد الأخير ٢٢

فإن المتواليه هى :

١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢

وعدد حدودها ٥ حدود

حاول أن تكتب المتواليه العدديه التى حدها الأول ٦ ، والأساس ٤ ،

والحد الأخير ٢٦

حيث عدد الحدود ٦

قبل أن تستمر فى القراءة

لو رمزنا للحد الأول بالرمز أ

والأساس بالرمز د

والحد الأخير بالرمز ل

وعدد الحدود بالرمز ن

فإنه بنفس الأسلوب نستطيع كتابة شكل المتواليه كما يلى:

أ + أ+د ، أ+٢ ، أ+٢د، ...... إلى الحد الأخير ل .....

ولكتابة علاقة للحد الأخير نلاحظ أن:

الحد الأول أ　　　بدون (د) (الأساس)

، الحد الثانى أ+د　　　أضفنا (د)

، الحد الثالث أ+٢د　　　بعد اضافة (د) أصبح مضافا (٢د)

، الحد الرابع أ+٣د　　　بعد اضافة (د) أصبح مضافا (٣د)

وهكذا نجد أن ترتيب الحد به عدد من ال (د) أقل منه بواحد وعلى هذا الأساس يمكن أن يكون الحد الخامس كما يلى:

الحد الخامس = أ + ٤د　　　ولو رمزنا للحد الخامس بالرمز $ح_{(٥)}$

فإن: $ح_{(٥)}$ = أ + ٤د

وأيضاً الحد العاشر [$ح_{(١٠)}$] هو :

$ح_{(١٠)}$ = أ + ٩د

حاول أن توجد كل من الحد السابع والحد الحادى عشر قبل الاستمرار فى القراءة.

الآن لايجاد الحد الأخير على اعتبار عدد الحدود (ن) حداً فإن الحد الأخير (ل) هو الحد الذى ترتيبه (ن) أى الحد النونى [$ح_{(ن)}$] ويسمى فى بعض الأحيان بالحد النونى أو الحد العام. وعلى ذلك:

ل = $ح_{(ن)}$ = أ + (ن-١) د　　　(١)

مثال(١)

أوجد الحد العاشر فى المتواليه العددية ..

١٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ..... ؟

الحل:

مـن المتواليـة السـابقة نجـد أن الحـد الأول = ١٠ أى ح(١) = ١٠ وأساس المتواليه = ٥ وهكذا ناتج من طرح كل حد من الحد السابق.

حيث ١٥-١٠ = ٥

، ٢٠ - ١٥ = ٥ ... وهكذا

وعليه فإن د = ٥

وباستخدام العلاقه (١) وهى:

ح(ن) = أ + (ن-١) د

وحيث أننا نريد الحد العاشر أى ح(١٠) فـإن ح(١٠) = أ + ٩ باسـتخدام العلاقة السابقة، وحيث أن:

أ = ١٠ ، د = ٥ نعوض بتلك القيم نصل إلى :

ح(١٠) = ١٠ + ٩ × ٥ = ١٠ + ٤٥ = ٥٥

∴ الحد العاشر [ح(١٠)] = ٥٥

حاول أن توجد الحد السابع فى المتواليه العدديه

٣، ٧، ١١، ..... قبل الاستمرار فى القراءة

الاجابة هى [ح(١٠) = ٢٧]

ايجاد مجموع المتواليه العددية:

سبق أن وصلنا للشكل العام المتواليه العدديه كما يلى:

أ ، أ+د ، أ+٢د ، .... ، ل أو [ح(١٠)]

لو رمزنا لمجموع (ن) من حدود المتواليه العدديه بالرمز (حـ) فإن:

$$ح = \frac{ن}{٢} [أ + ل] \qquad (٢)$$

أى .... مجموع المتوالية = $\frac{\text{عدد الحدود}}{٢}$ [الحد الأول + الحد الأخير]

مـثـال(٣)

أوجد مجموع المتواليه العدديه التالية:

٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩، ٢٢، ٢٥

الحل:

الحد الأول (أ) = ٤

الحد الأخير (ب) = ٢٥

عدد الحدود (ن) = ٨ بتطبيق العلاقه (٢)

$$ح = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

$$= \frac{٨}{٢} [٤ + ٢٥) = ٤ \times ٢٩ = ١١٦$$

قبل أن نستمر فى القراءة أوجد مجموع المتواليه العددية التالية:

٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٢٨

ويمكن أن نصل إلى علاقة ثابتة لايجاد مجموع المتوالية العددية مشتقة من المعادلة الأولى:

حيث أن $ح = \frac{ن}{٢} [أ + ل)$ **علاقة (٢)**

$ل = ح_{(ن)} = أ + (ن-١) د$ علاقة (١)

بالتعويض (استبدال) ل فى قانون الجملة بقيمتها نصل إلى :

$$حـ = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن-١) د]$$

أى أن:

$$حـ = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن-١) د] \quad (٣)$$

وتستخدم العلاقة السابقة فى ايجاد مجموع المتواليه العددية بمعلومية الحد الأول، الأساس، عدد الحدود دون الحاجه إلى ايجاد أو معرفة الحد الأخير.

مـثـال(٣)

أوجد مجموع المتوالية العددية التالية:

٦ ، ٨ ، ١٠ ، ..... إلى ٢٠ حداً

الحل:

الحد الأول ٦ ، الأساس ٢ ، عدد الحدود ٢٠

من العلاقة (٣)

$$حـ = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن-١) د]$$

$$حـ = \frac{٢٠}{٢} [٣ \times ٦ + (٢٠-١) \times ٢]$$

$$= ١٠ [١٢ + ١٩ \times ٢] = ١٠ [١٢ + ٣٨]$$

$$= ١٠ \times ٥٠ = ٥٠٠$$

المتواليات الهندسية:

يقال لمجموعة من الأرقام بأنها تأخذ شكل متواليـة هندسية وذلك إذا كان خارج قسمة أى رقم (فيما عدا الأول) على الرقم السابق له يساوى مقدار ثابت يسمى أساس المتوالية.

فمثلا : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ......

تعتبر متوالية هندسية حيث أن خارج قسمة أى حد على الحد السابق له تساوى رقم ثابت وهو ٢ حيث:

$$\frac{٤}{٢} = ٢$$

$$، \quad \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$، \quad \frac{١٦}{٨} = ٢ \qquad \text{وهكذا ،}$$

كذلك فإن:

٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .... تعتبر متوالية هندسية لأن:

$$\frac{٤}{٢٧} = \frac{١}{٣}$$

$$، \quad \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

أى الأساس = $\frac{١}{٣}$

وإذا رمزنا أن الحد الأول للمتوالية الهندسية الرمز (أ)

وأساسها بالرمز (ر) ، بدلا من (د) فى حالة المتوالية العددية

وعدد الحدود (ن) ، والحد الأخير (ل)

فإن الشكل العام المتوالية الهندسية تأخذ الشكل التالى:

أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، .... ، ل

حيث خارج قسمة كل حد على الحد السابق له تساوى مقدارا ثابت هو (ر) حاول أن تتحقق من ذلك قبل الاستمرار فى القراءة.

نجد أن الحد الأول هو أ	بدون (ر)
، الحد الثانى هو أ ر	بها (ر) أ س واحد
، الحد الثالث هو أ ر٢	بها (ر) أ س اثنين

وهكذا

أى أن أى حد من حدود المتواليه الهندسية عبارة عن أ مضروبة فى (ر) أ س ترتيب الحد ناقص واحد. أى أن الحد العاشر للمتوالية الهندسية [$ح_{(١٠)}$] هو:

[$ح_{(١٠)}$] = أ ر ٩

حاول أن توجد الحد العشرين من المتوالية الهندسية قبل الاستمرار فى القراءة.

ولايجاد الحد الأخير (ل) أو بمعنى آخر الحد النونى $ح_{(ن)}$

حيث عدد الحدود (ن) حداً نقول أن

ل = $ح_{(ن)}$ = أ ر$^{(ن-١)}$ (٤)

مـثـال(٤)

أوجد الحد العاشر للمتوالية الهندسية التالية ..

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ...... ؟

الحل:

الحد الأول (أ) = ١

والأساس (ر) = ٢ حيث : $\frac{٢}{١} = ٢$

، $\frac{٤}{٢} = ٢$

من العلاقة (٤) ، $\frac{٨}{٤} = ٢$

$ح_{(ن)} = أ\, ر^{ن-١}$

$\therefore ح_{(١٠)} = أ\, ر^{(١٠-١)} = أ\, ر^{٩}$

بالتعويض بقيمة أ = ١ ، ر = ٢

$\therefore ح_{(١٠)} = ١ \times ٢^{٩} = ١ \times ٥١٢ = ٥١٢$

حاول أن توجد الحد السابع من المتوالية الهندسية التالية قبلا لاستمرار فى القراءة.

٢ ، ٦ ، ١٨ ، ....

الاجابة هى [١٤٥٨]

إيجاد مجموع المتوالية الهندسية:

إذا كان الحد الأول للمتوالية هو (أ)

وعدد الحدود (ن)

والأساس (ر)

فإننا لايجاد مجموع المتوالية الهندسية (حـ) تتوقف علـى قيمـة أسـاس المتوالية (ر) فإذا كانت (ر) أكبر من واحد صحيح فإن:

$$حـ = أ \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \qquad (٥)$$

أى:

$$\text{مجموع المتوالية الهندسية} = \text{الحد الأول} \times \frac{(\text{الاساس})^{\text{عدد الحدود}} - ١}{\text{الاساس} - ١}$$

إما إذا كانت قيمة (ر) أقل من واحد صحيح فإن:

$$حـ = أ \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر} \qquad (٦)$$

$$\text{مجموع المتوالية الهندسية} = \text{الحد الأول} \times \frac{١ - (\text{الاساس})^{ن}}{\text{الاساس}}$$

مـثـال(٥)

أوجد مجموع المتوالية الهندسية التالية:

٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، إلى ١٠ حدود ؟

الحل:

الحد الأول (أ) = ٨

أساس المتوالية (ر) = ٢ حيث:

$$\frac{١٦}{٨} = ٢$$

، $$\frac{٣٢}{١٦} = ٢$$

وعدد الحدود (ن) = ١٠

وباستخدام العلاقة (٥) حيث (ر) أكبر من واحد [ر=٢]

$$حـ = أ \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

بالتعويض بقيمة أ = ٨ ، ر = ٢ ، ن = ١٠ فإن

$$حـ = ٨ \times \frac{٢^{١٠} - ١}{٢ - ١}$$

$$= ٨ \times \frac{١٠٢٤ - ١}{١}$$

$$= ٨ \times ١٠٢٣$$

$$= ٨١٨٤$$

مـثـال(٦)

أوجد مجموع المتوالية الهندسية

٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ..... إلى ٨ حدود ؟

الحل:

الحد الأول (أ) = ٥١٢ الاساس (ر) = $\frac{١}{٢}$ حيث:

$$\frac{٢٥٦}{٥١٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١٢٨}{٢٥٦} = \frac{١}{٢}$$

وعدد الحدود (ن) = ٨

تستخدم العلاقة (٦) حيث (ر) أقل من واحد [ر = $\frac{١}{٢}$]

$$\text{حـ} = \text{أ} \times \frac{\text{أ} - \text{ر}^{\text{ن}}}{١ - \text{ر}}$$

بالتعويض بقيمة أ = ١٥٢ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ٨ فإن:

$$\text{حـ} = ٥١٢ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٨}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= ٥١٢ \times \frac{١ - \frac{١}{٢٥٦}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= ٥١٢ \times \frac{\frac{٢٥٦ - ١}{٢٥٦}}{\frac{١}{٢}}$$

$$= ٥١٢ \times \frac{\frac{٢٥٥}{٢٥٦}}{\frac{١}{٢}}$$

$$= ٥١٢ \times \frac{٢٥٦}{٢٥٦} \times \frac{٢}{١}$$

$$= ٥١٢ \times \frac{٢٥٥}{٢٥٦} \times \frac{٢}{١}$$

$$= ١٠٢٠$$

حاول قبل أن تستمر فى القراءة أن توجد مجمـوع المتواليـة الهندسـية ٣،١ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ..... إلى ١٠ حدود. [الاجابة هى: ٨٨٥٧٢]

إيجاد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية:

إذا كان عدد حدود المتالية الهندسية كبير جداً أو بعبارة اخـرى مـا لا نهاية أى أن:

عدد الحدود (ن) يصبح ما لا نهاية (∞)

فالايجاد مجموع المتوالية الهندسية اللانهاية يشترط أن يكون أساسـها (ر) أقل من واحد صحيح ونوجد المجموع ، من العلاقة التالية:

$$ح = \frac{أ}{١ - ر} \qquad (٧)$$

أي:

مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية = $\frac{\text{الحد الأول}}{\text{١ - الاساس}}$

مثال(٧)

أوجد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية:

$$١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨} ، \ldots\ldots$$

الحل:

الحد الأول (أ) = ١ ، الأساس (ر) = $\frac{١}{٢}$ حيث:

$$\frac{\frac{١}{٢}}{١} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\frac{١}{٨}}{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

باستخدام العلاقة (٧) فإن:

$$ح = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$ح = \frac{١}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{١}{\frac{٢ - ١}{٢}}$$

$$= \frac{١}{\frac{١}{٢}}$$

$$= ١ \div \frac{١}{٢}$$

$$= ١ \times \frac{٢}{١}$$

$$= ٢$$

حاول أن توجد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية قبل الانتهاء من هذه الوحدة

$$١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، ......$$

الاجابة هى [$\frac{٣}{٢}$ أو $١\frac{١}{٢}$] .....

الفصل الثانى: المتسلسلات

المتسلسلة هى عبارة عن مقدار جبرى يتكون من حدود تتوالى بترتيب معين وفق قانون ثابت، فإذا كان للمتسلسلة عدد محدود من الحدود فتسمى فى هذه الحالة متسلسلة محدودة finite أما إذا كان عدد حدود المتسلسلة غير محدود فتسمى متسلسلة غير محدودة أو لا نهائية Infinite والمستلسلات اللانهائة تتضمن الأنواع الآتية:

أ- المتسلسلة التقاربية Convergent

ب- المتسلسلة التباعدية Divergent

ج- المتسلسلة المتذبذبة Oscillating

والمقصود بالمتسلسلة التقاربية هى المتسلسلة اللانهائية والذى يقترب مجموعها من نهاية محدودة (أ) مثلاً، فى هذه الحالة يقال أن المتسلسلة تقاربية وأنها تتقارب إلى النهاية أ.

أما المتسلسلة التباعدية فهى المتسلسلة اللانهائية والذى يزداد مجموعها زيادة مضطردة بزيادة عدد الحدود المأخوذه ودون أن تقترب من أى قيمة محددة وفى هذه الحالة يقال أن المتسلسلة تباعدية.

أما المتسلسلة المتذبذبة فهى المتسلسلة التى يتذبذب مجموعها بين قيمتين محددتين بحسب عدد ما تأخذه من الحدود.

وترتيباً على ما تقدم إذا رمزنا لمجموع المتسلسلة بالرمز حـن وكان

نــــــها حـن = أ حيث أ قيمة معينة
ن ← ∞

فإن المتسلسلة تكون تقاربية

أما إذا كان

$$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \infty \text{ أى } \neq أ \text{ ، أ قيمة معينة}$$

فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

وفيما يلى بعض أنواع المتسلسلات:

١- المتسلسلة الهندسية اللانهائية متسلسلة تقاربية لأن لها مجموع محدد ومثال ذلك المتسلسلة:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \ldots\ldots$$

تعتبر متسلسلة حيث أن:

$$ح_ن = \frac{١ - (\frac{١}{٢})^{ن}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \frac{١}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$$

٢- المتسلسلة ١ + ١ + ١ + ١ + ...

متسلسلة تباعدية حيث أن

$$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \infty$$

٣- المتسلسلة

١- ١ + ١ - ١ + ١ - ١ + ...

تعتبر أيضاً متسلسلة تباعدية حيث أن مجموعها غير محدد (أى له أكثر من قيمة أو نهاية محددة)، حيث نجد أن:

نهـــــــا $ح_{٢ن}$ = صفر ،
ن $\leftarrow \infty$ (إذا أخذنا عدداً زوجياً من الحدود)

نهـــــــا $ح_{٢ن+١}$ = ١
ن $\leftarrow \infty$ (إذا أخذنا عدداً فردياً من الحدود)

ومحاولة العثور على مجموع المتسلسلة ليس هو السبيل الوحيد لتقرير أن المتسلسلة تقاربية أو تباعدية، إذ أن كثيراً من المتسلسلات مجاميعها غير معروفة ومع ذلك فهى تقاربية وهذا يبين حاجتنا إلى اختبارات بسيطة تقرر لنا كون المتسلسلة قيد البحث تقاربية أو تباعدية ومن ثم توفر لنا عناء البحث عن مجموع لها على فرض كونها تباعدية.

اختبارات تقارب وتباعد المتسلسلات:

هناك عدة اختبارات تستطيع عن طريقها معرفة ما إذا كانت المتسلسلة قيد البحث تقاربية أو تباعدية.

ومن أهم هذه الاختبارات: اختبار المقارنة واختبار النسبة.

١- اختبار المقارنة:

يتلخص هذا الاختبار في مقارنة المتسلسلة قيد البحث بمتسلسلة معروف أمرها ولدينا القواعد الآتية في هذا الشأن وذلك بالنسبة للمتسلسلات التي تكون إشارات حدودها جميعاً موجبة.

١- إذا كان لدينا متسلسلتين $\sum_{ر=٠}^{\infty}$ أر ، $\sum_{ر=٠}^{\infty}$ بر

وكانت الأولى تقاربية وكل حد من حدود المتسلسلة الثانية أصغر من أو يساوي نظيره من حدود المتسلسلة الأولى أي أن بر $\leq$ أر فإن المتسلسلة الثانية $\sum_{ر=٠}^{\infty}$ بر تكون تقاربية أيضاً

فمثلا المتسلسلة:

$$١ + \frac{١}{٢ \times ٢} + \frac{١}{٣ \times ٢^{٢}} + \frac{١}{٤ \times ٢^{٣}} + \dots\dots$$

تقاربية وذلك لأنه بمقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسة الهندسية اللانهائية.

$$١ + \frac{١}{٢} + (\frac{١}{٣})^{٢} + (\frac{١}{٤})^{٣} + \dots\dots$$

والتي مجموعها يساوي ٢

نجد أن كل حد من حدود المتسلسلة الأولى (قيد البحث) أصغر من نظيره في المتسلسلة الثانية فيما عدا الحد الأول في كل من المتسلسلتين حيث يتساويان:

لذلك فإن المتسلسلة الأولى (قيد البحث) تكون تقاربية.

٢- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ر=٠}^{\infty}$ أر تباعدية وكان كل حد من حدود المتسلسلة $\sum$ بر أكبر من أو يساوى نظيره من حدود المتسلسلة الأولى، كانت المتسلسلة الثانية تباعدية أيضاً.

فمثلاً المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \ldots\ldots$$ تباعدية

البرهان

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \ldots\ldots$$

$$= ١ + \left(\frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٨}\right) +$$

$$> ١ + \left(\frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}\right) + \ldots$$

$$= ١ + \frac{١}{٢} + \left(\frac{٢}{٤}\right) + \left(\frac{٤}{٨}\right) + \left(\frac{٨}{١٦}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

ولكن المتسلسلة $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \ldots.$ تباعدية

وذلك لأن $ج_ن = \frac{ن + ١}{٢}$

وحيث أن كل حد من حدود المتسلسلة قيد البحث ≤ نظيره فى المتسلسلة المعروفة التباعدية، فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

٢- اختبار النسبة Ratio or D'Alembert test

فى هذا الاختبار نبحث عن حدين متتالين وليكن القيمة المطلقة $ح_ن$، $ح_{ن+١}$ ثم نحسب النسبة بين هذين الحدين فإذا كانت نهاية هذه النسبة عندما $ن \leftarrow \infty$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية أما إذا كانت نهاية النسبة > ١ كانت المتسلسلة تباعدية، أما إذا كانت نهاية النسبة = ١ فإنه لا يمكن القول بأنها تقاربية أو تباعدية (أى يفشل الاختبار) ونبحث فى المتسلسلة الأصلية بطريقة أخرى ونعوض فيها عن س = ١ ونحاول أن نعرف تقاربها أو تباعدها وعلى ذلك فإننا نأخذ النسبة

$$\left| \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} \right|$$

ثم نبحث عن نهايتها ولتكن

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نــــها}} \left| \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} \right| = ل \begin{cases} < ١ & \text{تقاربية} \\ = ١ & \text{يفشل الاختبار} \\ > ١ & \text{تباعدية} \end{cases}$$

مثـال (٨)

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلة

$$١^٢ + ٢^٢ س + ٣^٢ س^٢ + ٤^٢ س^٣ + ٥^٢ س^٤ + \ldots\ldots \infty$$

الحل:

$$ح_ن = ن^٢ س^{ن-١} \text{ ، } ح_{ن+١} = (ن+١)^٢ س^ن$$

$$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{(ن+١)^{٢}\, س^{ن}}{ن^{٢}\, س^{ن-١}} = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)^{٢} س$$

$$\therefore\ \lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} \right| = \lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{٢} |س|$$

$$= |س|$$

ويكون لدينا الحالات الآتية:

أ- إذا كانت $|س| < ١$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية.

ب- إذا كانت $|س| > ١$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

جـ- إذا كانت $|س| = ١$ فإن الاختبار يفشل أى لا يصلح للتطبيق

وعلينا إيجاد المتسلسلة فى حالة $س = ١$ ، $س = -١$

أولاً: عندما س = ١ فإننا نحصل على

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + \ldots\ldots\ldots$$

$$ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١)}{٦}$$

$$\therefore\ \lim_{ن \to \infty} ح_ن = \infty$$

أى أن المتسلسلة تكون تباعدية عندما $س = ١$

ثانياً: عندما س = -١ فإننا نحصل على

$$١^{٢} - ٢^{٢} + ٣^{٢} - ٤^{٢} + ٥^{٢} + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{ر=١} (١-٢)\,(١+٢) + (٣-٤)\,(٣+٤) + (٥-٦)\,(٥+٦)$$

$$+ (٧ - ٨)\,(٧ + ٨) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= -٣ - ٧ - ١١ - ١٥ - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \text{حـ}_{\text{ن}} = -\frac{\text{ن}}{٢}\left(٦ + (\text{ن} - ١) \times ٤\right)$$

$$= -\frac{\text{ن}}{٢}\left(٤\,\text{ن} + ٢\right)$$

$$= -\text{ن}\left(٢\,\text{ن} + ١\right)$$

$$= -٢\,\text{ن}^{٢} - \text{ن}$$

$$\therefore \text{نهـا}_{\text{ن} \to \infty} \text{حـ}_{\text{ن}} = -\infty$$

أى أن المتسلسلة تكون تباعدية عندما س = −١

مـثـال (٩)

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلات الآتية:

أ) $\text{مجـ} \dfrac{٢^{\text{ر}}}{\text{ر}^{٣}}$ ب) $\text{مجـ} \dfrac{\text{ر}^{٢} - ١}{(\text{ر}+١)!}$

ب) $\text{مجـ} \dfrac{٢^{\text{ر}}}{(\text{ر}-١)!}$ د) $\text{مجـ} \left(٢_{\text{ر}} - ١\right) \text{س}^{\text{ر}-١}$

إرشاد الحل:

باستخدام اختبار النسبة نجد أن:

أ− تباعدية.

ب− تقاربية.

جـ- تقاربية.

د) تقاربية إذا كانت $|س| < ١$

مـثـال (١٠)

أوجد قيمة س لكى تكون المتسلسلة الآتية تقاربية:

$$\text{مجـ} \frac{(س - ٢)^{ر}}{ر^{٣}}$$

الحل:

$$ح_{ن} = \frac{(س - ٢)^{ن}}{ن^{٣}}$$

$$ح_{ن+١} = \frac{(س - ٢)^{ن+١}}{(ن + ١)^{٣}}$$

$$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{(س-٢)^{ن+١}}{(ن+١)^{٣}} \times \frac{ن^{٣}}{(س-٢)^{ن}}$$

$$= \frac{ن^{٣}}{ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٣ن + ١} (س - ٢)$$

$$\therefore \underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نــــها}} \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = |س - ٢|$$

لكى تكون المتسلسلة تقاربية فإن $|س - ٢| < ١$

$\leftarrow ١ \geq س \geq ٣$

مثال (١١)

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية:

$$ح_{ر} = \frac{١}{ر\,(ر + ١)}$$

الحل:

$$\sum_{ر=١}^{\infty} ح_{ر} = \sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر\,(ر + ١)}$$

$$= \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٣\times٤} + \frac{١}{ن(ن+١)} + ...$$

$$ح_{ن} = \sum_{ر=١}^{ن} ح_{ر} = \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٣\times٤} + ... + \frac{١}{ن(ن+١)}$$

$$= (١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + ... + (\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١})$$

$$\therefore ح_{ن} = \sum_{ر=١}^{ن} ح_{ر} = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ر\,(ر+١)}$$

$$= ١ - \frac{١}{ن + ١}$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = ١ - \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن + ١} = ١$$

وعلى ذلك فإن المتسلسلة تكون تقاربية.

حيث أن $\lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = ١$ قيمة محددة

مثال (١٣)

ابحث تقارب وتباعد المتسلسلة الهندسية اللانهائية الآتية:

$$١ + س + س^{٢} + س^{٣} + ... س^{د-١} + ...$$

الحل:

لبحث تقارب وتباعد المتسلسلة السابقة يجب التفرقة بين خمس حالات:

أ) $|س| < ١$ ب) $س > ١$

جـ) $س = ١$ د) $س = -١$

هـ) $س < -١$

أ) إذا كانت $|س| < ١$ بمعنى أن س كسر حقيقى موجب أو سالب فإن مجموع المتسلسلة يتمثل فى مجموع متوالية هندسية عدد حدودها ن وأساسها س أقل من الواحد الصحيح عندما ن تؤول إلى مالا نهاية أى أن:

$$ح_{\infty} = \lim_{ن \to \infty} ح_ن = \lim_{ن \to \infty} \frac{١ - س^{ن}}{١ - س}$$

$$= \frac{١}{١ - س} \quad \text{حيث } \lim_{ن \to \infty} س^{ن} = \text{صفر}، \ |س| < ١$$

$\therefore \frac{١}{١ - س}$ مقدار محدود

$\therefore$ المتسلسلة تكون تقاربية فى هذه الحالة.

ب) إذا كـانت س > ١ فـإن مجمـوع المتسلسـلة يتمثـل فـى مجمــوع متواليــة هندسية عدد حدودها ن وأساسها س > ١ عندما تؤول ن إلى مــالا نهايـة أى أن:

$$\text{ح}_{\infty} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{ح}_{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س} - ١} = \infty$$ (مقدار غير محدود)

∴ المتسلسلة تكون تباعدية فى هذه الحالة.

جـ) إذا كـانت س = ١ فـإن مجمـوع المتسلسـلة يتمثـل فـى مجمـوع أعـداد لا نهائية كل منها يساوى الواحد الصحيح.

$\text{حـ} = ١ + ١ + ١ + ١ + \ldots\ldots\ldots$ إلى ∞ من الحدود

$\therefore \text{ح}_{\infty} = \infty$

أى أن المتسلسلة تكون تباعدية فى هذه الحالة.

د) إذا كـانت س = -١ فـإن مجمـوع المتسلسـلة يتمثـل فــى مجمــوع جـبرى لأعداد لا نهائية كل منها يساوى الواحد الصحيـح بإشـارات موجبـة ثـم سـالبة وهكذا إلى مالا نهاية أى أن:

$$\text{حـ} = ١ - ١ + ١ - ١ + ١ - ١ \pm \infty$$

ويلاحظ أن المجموع فى هذه الحالة يعتمد على عدد الحدود المـأخوذة فإذا كان عدد الحدود زوجياً فإن:

$\text{ح}_{\infty} = \text{صفر}$

أما إذا كان عدد الحدود فردياً فإن:

$\text{ح}_{\infty} = ١$.

ويتبين من ذلك أن المتسلسلة فى هذه الحالة تكون متذبذبة تذبذباً محدوداً بين صفر، ١. (تباعدية).

هـ) إذا كانت س < − ١ فإن مجموع المتسلسلة إذا كان عدد الحدود فردى هو:

$$ح_\infty = \text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \frac{١ - س^ن}{١ - س} = - \infty$$

أما مجموع المتسلسلة إذا كان عدد الحدود زوجى فهو:

$$ح_\infty = \text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \frac{١ - س^ن}{١ - س} = + \infty$$

ومن هذا يتبين أن المتسلسلة متذبذبة تذبذباً لا نهائياً بين + ∞ ، −∞ (أى أنها تباعدية أيضاً).

بعض النظريات فى تقارب وتباعد المتسلسلات:

قد تصادف بعض الحالات التى يصعب فيها إيجاد مجموع المتسلسلة أو إيجاد نهايتها ولذا فقد وضعت بعض النظريات التى تساعد فى اختبار تقارب وتباعد المتسلسلات دون الحاجة إلى إيجاد مجموعها.

وفيما يلى بعض نظريات تقارب وتباعد المتسلسلات.

النظرية الأولى:

تكون المتسلسلة اللانهائية التى حدودها موجبة ثم سالبة على التبادل تقاربية إذا كان كل حد من حدودها أقل عددياً من سابقة، وكانت نهاية الحد النونى عند ن تؤول إلى مالا نهاية يساوى صفر.

ولا نطباق النظرية السابقة لابد من توافر الشروط الثلاثة الآتية:

الشرط الأول:

أن تكون حدود المتسلسلة اللانهائية موجبة ثم سالبة على التبادل.

الشرط الثاني:

أن يكون كل حد من حدود المتسلسلة أقل عددياً من سابقة.

الشرط الثالث:

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نـــــها}}\ ح_ن = \text{صفر}$$

مثـال (١٣)

أثبت دون جمع أن المتسلسلة الآتية تقاربية:

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + ...$$

الحل:

تنطبق على هذه المتسلسلة النظرية الأولى لتوافر شروطها وهى:

١- أن حدود المتسلسلة موجبة ثم سالبة على التوالى.

٢- أن كل حد من حدود المتسلسلة أقل عددياً من سابقة.

٣- $\underset{ن \to \infty}{\text{نـــــها}}\ ح_ن = \underset{ن \to \infty}{\text{نـــــها}}\ \frac{١}{ن} = \frac{١}{\infty} = \text{صفر}$

لذلك فإن المتسلسلة تكون تقاربية.

كما يلاحظ أيضاً أن مجموع المتسلسلة السابقة = لو ٢ وذلك لأن مفكوك لو (١ + س) يتحدد بالعلاقة الأتية:

$$لو\ (١ + س) = س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} + \dots\dots \infty$$

وبالتعويض عن س = ١ في الطرفين ينتج أن:

$$لو_{٢} = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \dots\dots \infty$$

مثال (١٤)

حدد نوع المتسلسلة الآتية:

$$٢ - \frac{٣}{٢} + \frac{٤}{٣} - \frac{٥}{٤} + \frac{٦}{٥} - \frac{٧}{٦} + \dots\dots$$

الحل:

تختبر هل المتسلسلة تقاربية من عدمه عن طريق تحقيق توافر شروط النظرية الأولى.

فيلاحظ أن الشرط الأول والثاني متوافران حيث أن حدود هذه المتسلسلة ترددية كما أن كل حد يقل عددياً عن الحد الذي يسبقه.

ولا يبق لأنطباق النظرية الأولى سوى توافر الشرط الأخير.

$$\because ح_{ن} = \frac{ن + ١}{ن}$$

$$\lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{ن} = ١ \neq صفر$$

وهذا لا يحقق الشرط الأخير فى النظرية، وعليه فإن المتسلسلة ليست تقاربية ويمكن تحديد نوع المتسلسلة إذا قمنا بجمع حدود المتسلسلة على النحو التالى:

$$ح = \frac{٢}{١} - \frac{٣}{٢} + \frac{٤}{٣} - \frac{٥}{٤} + \frac{٦}{٥} - \frac{٧}{٦} + ... $$

$$= (١+١) - (١+ \frac{١}{٢}) + (١+ \frac{١}{٣}) - (١+ \frac{١}{٤})$$

$$-(١+ \frac{١}{٥}) -(١+ \frac{١}{٦}) \pm .... \infty$$

$$= ١-١ +١-١+ \pm ... (١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + ... \infty$$

فإذا كان عدد الحدود فردى فإن:

$$ح = ١ + لو٢$$

أما إذا كان عدد الحدود زوجى فإن:

$$ح = صفر + لو٢$$

أى أن المتسلسلة متذبذبة بين لو٢ ، (١ + لو٢)

النظرية الثانية:

المتسلسلتان $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ...... ، $ح'_١$ ، $ح'_٢$ ، $ح'_٣$ ..... تكونان تقاربيتان معا أو تباعديتان معا إذا كانت حدود كل منهما موجبة أبو سالبة وكان.

نهـــــا $\frac{ح_ر}{ح'_ر}$ = ل حيث ل مقدار محدود يختلف عن الصفر.

وعلى ذلك فإنه إذا كانت إحدى المتسلسلتين ذات مجموع محدود فلابد وأن تكون الأخرى أيضاً ذات مجموع محدود. أما إذا كانت قيمة أحداهما لانهائية فلابد وأن تكون قيمة الأخرى لانهائية وهذا يعني أن المتسلسلتين تكونان تقاربيتان معا أو تباعديتان معا ولذلك يجب أن تكون ل مختلفة عن الصفر.

ويلاحظ أنه عند تطبيق النظرية السابقة تختار متسلسلة نعلم مقدماً أنها تقاربية أو تباعدية لمقارنتها بالمتسلسلة المختبرة.

النظرية الثالثة:

المتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر^ن} = \frac{١}{١^ن} + \frac{١}{٢^ن} + \frac{١}{٣^ن} + ... + \frac{١}{ر^ن} + ...$$

تكون تقاربية إذا كانت ن > ١ وتكون تباعدية فيما عدا ذلك.

مثـال (١٥)

اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلة الآتية:

$$\frac{٣}{٢ \times ٣ \times ٤} + \frac{٥}{٣ \times ٤ \times ٥} + \frac{٧}{٤ \times ٥ \times ٦} + ...$$

الحل:

$$ح_ر = \frac{٢ر + ١}{(ر + ١)\ (ر + ٢)\ (ر + ٢)}$$

يمكن مقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسلة المساعدة $\sum_{ر=١} = \frac{١}{ر^٢}$

هذه المتسلسلة تقاربية لأن ن > ١.

ويكون الحد العام فى المتسلسلة المساعدة هو:

$$ح'_ر = \frac{١}{ر^{٢}}$$

$$\therefore \frac{ح_ر}{ح'_ر} = \frac{ر^{٢} + ١}{(ر + ١)(ر + ٢)(ر + ٣)} \times \frac{٢}{١}$$

$$= \frac{٣\left(٢ + \frac{١}{ر}\right)}{ر^{٣}\left(١ + \frac{١}{ر}\right)\left(١ + \frac{١}{ر}\right)\left(١ + \frac{٣}{ر}\right)} = ٢$$

$$\therefore \lim_{ر \to \infty} \frac{ح_ر}{ح'_ر} = \lim_{ر \to \infty} \frac{٢ + \frac{١}{ر}}{\left(١ + \frac{١}{ر}\right)\left(١ + \frac{٢}{ر}\right)\left(١ + \frac{٣}{ر}\right)} = ٢$$

وهذا مقدار محدود مما يترتب عليه أن تكون المتسلسلتان تقاربيتان معاً أو تباعديتان معاً (النظرية الثانية).

ونظراً لأن المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر^{٢}}$ تقاربية فلابد وأن تكون المتسلسلة المعطاة تقاربية أيضاً.

ملحوظة:

مرة أخرى لا يؤدى اختبار النسبة إلى نتيجة فى هذا المثال حيث أن النهاية تساوى الواحد الصحيح.

الباب السادس

الإستنتاج الرياضى

Mathematical induction

أن صحة النتائج أو سلامة الحقائق الجديدة التى نتوصل إليها يمكن التأكد منها بطرق منطقية تتضمن:

أ) المنطق الأستقرائى:

فى إطار المنطق الاستقرائى نبدأ بجمع بعض الحقائق سواء بطريقة المشاهدة أو الأختبار ونحاول أن نستنتج منها قاعدة عامة.

ب) المنطق القياسى:

ووفقاً للمنطق القياسى فإننا نبدأ بقاعدة عامة أو قانون مسلم بصحته ونصل منه إلى نتائج أو حالات خاصة.

والاستنتاج الرياضى يتضمن الاستقراء والقياس معا. فعلى سبيل المثال فإن:

$$1 + 2 = 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \text{ ،}$$

وهكذا.....

وعلى أساس الحقائق السابقة فإنه يمكن تحقيق القاعدة الآتية:

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ن = \frac{١}{٢} ن (ن + ١)$$

والقانون السابق والمستنتج بالمنطق الاستقرائى يمكن التأكد من صحته باستخدام الاستنتاج الرياضى وعلى ذلك فإنه يمكن تعريف الاستنتاج الرياضى إنه الطريقة التى تستخدم فى التحقق من صحة قانون ما، إذ كان هذا القانون يسمح بحالات متتابعة مرتبة ترتيباً مناظراً للأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، .... الخ والتطبيقات الآتية توضح طريقة الاستنتاج الرياضى:

التطبيق الأول

حقق بالاستنتاج الرياضى أن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن}{٢} (ن + ١)$$

يتبين من هذا التطبيق أن المطلوب إثباته هو أن:

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ر + ... + ن = \frac{ن}{٢} (ن + ١)$$

لإثبات ذلك يمكن التحقق من صحة القانون فى حالات متتابعة كما يلى:

١) إذا كانت ن = ١

الطرف الأيمن = ١

$$الطرف الأيسر = \frac{١}{٢} (١ + ١) = ١$$

إذن القانون صحيح فى حالة ما إذا كانت ن = ١

٢) إذا كان ن = ٢

الطرف الأيمن = ١ + ٢ = ٣

الطرف الأيسر = $\frac{٢}{٢}$ (٢ + ١) =٣

وذلك يعنى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٢

٣) إذا كانت ن = ٣

الطرف الأيمن = ١ + ٢ + ٣ = ٦

الطرف الأيسر = $\frac{٣}{٢}$ (٣ + ١) =٦

أى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٣

٤) إذا كانت ن = م

الطرف الأيمن = ١ + ٢ + ٣ + ... + م

الطرف الأيسر = $\frac{م}{٢}$ (م + ١)

أى أن $\sum_{ر=١}^{م}$ ر = $\frac{م}{٢}$ (م + ١) ..... (١)

وبفرض أن القانون صحيح فى هذه الحالة، وحتى نتأكد من سلامة هذا الفرض فإننا نقوم بإضافة حد جديد إلى طرفى المتطابقة السابقة وهو الحد الذى ترتيبه م + ١ وقيمته م + ١ أيضاً فإنه يكون لدينا:

١ + ٢ + ٣ + ... + م + م + ١ = $\frac{م}{٢}$ (م + ١) + (م + ١)

$\therefore \sum_{ر=١}^{م+١}$ ر = $\frac{م(م + ١)}{٢} + \frac{٢ (م + ١)}{٢}$

$$= \frac{م + ١}{٢} (م + ٢) = \frac{م + ١}{٢} (م + ١ + ١) \quad ..... \qquad (٢)$$

ويلاحظ أن للقيمة الناتجة فى (٢) هى نفس صورة القيمة المفروضة فى (١) مع وضع م + ١ بدلاً من م. وهذا يعنى أنه إذا كان القانون صحيحاً فى حالة ن = م فهو صحيح أيضاً فى حالة ن = م + ١.

ونخلص مما تقدم أن القانون صحيح فى حالة ن =١ ، ن =٢ ، ن=٣ ن = م. وعلى ذلك فهذا القانون صحيح فى حالة ما إذا كانت ن تساوى أى عدد صحيح موجب من الحدود..

ويوضح المثال السابق طريقة الاستنتاج الرياضى حيث أننا بدأنا بتطبيق المنطق الاستقرائى حيث عوضنا عن ن = ١ ، ن = ٢ ، ن = ٣ ثم استخدمنا المنطق القياسى حيث فرضنا صحة القانون فى حالة ن = م وتوصلنا من ذلك إلى صحة القانون بصفة عامة.

التطبيق الثانى

حقق بالاستنتاج الرياضى أن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن}{٦} [(ن + ١) (٢ن + ١)]$$

أى أن المطلوب إثباته هو أن:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ... + ن^{٢} = \frac{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}{٦}$$

ولإثبات ذلك يمكن التحقق من صحة القانون فى حالات متتابعة كما يلى:

١) إذا كانت ن = ١

الطرف الأيمن = $١^{٢}$ = ١

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{١ \times ٢ \times ٣}{٦} = ١$$

وبذلك يكون القانون صحيحاً فى حالة ن = ١

٢) إذا كانت ن = ٢

$$\text{الطرف الأيمن} = ١^{٢} + ٢^{٢} = ٥$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٢\ (٢ + ١)\ (٢ \times ٢ + ١)}{٦} = \frac{٢ \times ٣ \times ٥}{٦} = ٥$$

أى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٢

٣) إذا كانت ن = ٣

$$\text{الطرف الأيمن} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} = ١٤$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٣\ (٣ + ١)\ (٣ \times ٢ + ١)}{٦} = \frac{٣ \times ٤ \times ٧}{٦} = ١٤$$

وهذا يؤكد أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٣

وحتى يمكن إثبات القانون فى صورته العامة نفرض أن صحيح فى حالة ن = م.

أى أن:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \ldots\ldots + م^{٢} = \frac{م\ (م + ١)\ (٢م + ١)}{٦}$$

$$\sum_{ر=١}^{م} ر^{٢} = \frac{م}{٦}\ (م + ١)\ (٢م + ١) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

وبإضافة $(م + ١)^{٢}$ إلى طرفى المتطابقة السابقة فإنه يكون لدينا:

$$\underset{ر=1}{\overset{م+1}{مجـ}} ر^{2} = \frac{(م+1)(م+1+1)(2م+2+1)}{6}$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + ... + م^{2} + (م+1)^{2}$$

$$= \frac{م(م+1)(2م+1)}{6} + (م+1)^{2}$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + ... + م^{2} + (م+1)^{2}$$

$$= \frac{م(م+1)(2م+1) + 6(م+1)^{2}}{6}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{م+1}{مجـ}} ر^{2} = \frac{(م+1)[م(2م+1) + 6م + 6]}{6}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{م+1}{مجـ}} ر^{2} = \frac{(م+1)(2م^{2} + 7م + 6)}{6}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{م+1}{مجـ}} ر^{2} = \frac{(م+1)(2م+3)(م+2)}{6}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{م+1}{مجـ}} ر^{2} = \frac{م+1}{6}(م+1+1)(2م+2+1).... \qquad (2)$$

ويلاحظ أن المتطابقة (٢) لها نفس صورة المتطابقة (١) بإحلال م+١ محل م وهذا يعنى أنه إذا كان القانون صحيحاً فـى حالـة ن = م فهو صحيح أيضاً فى حالة ن = م+١

وحيث أن القانون صحيح فى حالة ن = ١ ، ن = ٢ ، ن = ٣. وهو أيضاً صحيح فى حالة ن = م ، ن = م+١. فإن هذا يؤكد صحة القانون فى حالة ما إذا كانت ن تساوى أى عدد صحيح موجب.

التطبيق الثالث

حقق بالاستنتاج الرياضى أن:

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} + \text{ر} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)\,(\text{ن}+٢)}{٣}$$

أى أن المطلوب إثباته هو أن:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \dots + \text{ن}^{٢} + ١ + ٢ + \dots + \text{ن} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)\,(\text{ن}+٢)}{٣}$$

ولإثبات ذلك يمكن التحقق من صحة القانون فى حالات متتابعة كما يلى:

١- إذا كانت ن = ١

الطرف الأيمن = ١ + ١ = ٢

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{١\,(١+١)\,(١+٢)}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

أى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ١

٢- إذا كانت ن = ٢

الطرف الأيمن = ١ + ٢^{٢} + ١ + ٢ = ٨

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٢\,(٢+١)\,(٢+٢)}{٣} = ٢٠$$

وهذا يعنى أن القانون صحيح فى حالة ن = ٢

٣- إذا كانت ن = ٣

$$\text{الطرف الأيمن} = ١ + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ١ + ٢ + ٣ = ٢٠$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٣\,(٣ + ١)\,(٣ + ٢)}{٣} = ٢$$

وهذا يؤكد صحة القانون فى حالة ن = ٣

ولإثبات صحة القانون فى صورته العامة نفرض أنه صحيح فى حالة ن = م أى أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{م}{\text{مجـ}}} \left(ر^{٢} + ر\right) = \frac{م\,(م + ١)\,(م + ٢)}{٣} \quad ..... \quad (١)$$

أى أن:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ... + م^{٢} + ١ + ٢ + ... + م$$

$$= \frac{م\,(م + ١)\,(م + ٢)}{٣}$$

وبإضافة $(م + ١)^{٢}$ ، $(م + ١)$ إلى طرفى المتطابقة (١) ينتج أن:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ... + م^{٢} + (م + ١)^{٢} + ١ + ٢ + ... + م + م + ١$$

$$= \frac{م\,(م + ١)\,(م + ٢)}{٣} + (م + ١)^{٢} + (م + ١)$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{م+١}{\text{مجـ}}} \left(ر^{٢} + ر\right) = \frac{م(م+١)(م+٢) + ٣(م+١)\,(م+١) + ٣(م+١)}{٣}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{\text{مجـ}}} \left(ر^{٢} + ر\right) = \frac{(م+١)\,[م\,(م+٢) + ٣\,(م+١) + ٣]}{٣}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}+١} \text{ر}^{٢} + \text{ر} = \frac{(\text{م}+١)(\text{م}^{٢} + ٥\text{م} + ٦)}{٣}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}+١} \text{ر}^{٢} + \text{ر} = \frac{(\text{م}+١)(\text{م} + ٢)(\text{م} + ٣)}{٣}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}+١} \text{ر}^{٢} + \text{ر} = \frac{(\text{م}+١)(\text{م}+١+١)(\text{م}+١+ ٢)}{٣} \quad \ldots \quad (٢)$$

ويلاحظ أن (٢) لها نفس صورة (١) بإحلال م+١ محل م.

ونخلص من ذلك أنه إذا كان القانون صحيحاً فى حالة ن = م فهو صحيح أيضاً فى حالة ن = م + ١

وحيث أن القانون صحيح فى حالة ن = ١ ، ن = ٢ ، ن = ٣

فهو صحيح فى حالة ن = م ، ن= م + ١ ، ن = أى عدد صحيح موجب.

والأمثلة التالية توضح استخدام بعض النظريات الرياضية فى تحقيقات الاستنتاج الرياضى.

مثال (١)

أوجد $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}(\text{ر} + ١) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} + \text{ر}$

الحل:

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} + \text{ر} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}$$

$$\overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٦} + \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

$$\overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١) + ٣ن\ (ن + ١)}{٦}$$

$$\overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١ + ٣)}{٦}$$

$$\therefore \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ٤)}{٦}$$

$$\therefore \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (ن + ٢)}{٣}$$

مثال (٣)

أوجد:

أ) $\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

ب) $\overset{٢٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

جـ) $\overset{٣٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

د) $\overset{٤٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

هـ) $\overset{٥٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

و) $\overset{٦٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر$

الحل:

أ) $\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + \ldots + ١٠^{٢} + ١ + ٢ + \ldots + ١٠$

$$= \frac{١٠\,(١٠ + ١)\,(١٠ + ٢)}{٣}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢}{٣} = ٤٤٠$$

ب) $$\underset{ر=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + \ldots + ٢٠^{٢} + ١ + ٢ + \ldots + ٢٠$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٢٠\,(٢٠ + ١)\,(٢٠ + ٢)}{٣}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٢٠ \times ٢١ \times ٢٢}{٣} = ٣٠٨٠$$

جـ) $$\underset{ر=١}{\overset{٣٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + \ldots + ٣٠^{٢} + ١ + ٢ + \ldots + ٣٠$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٣٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٣٠\,(٣٠ + ١)\,(٣٠ + ٢)}{٣}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{٣٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٣٠ \times ٣١ \times ٣٢}{٣} = ٩٩٢٠$$

د) $$\underset{ر=١}{\overset{٤٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + \ldots + ٤٠^{٢} + ١ + ٢ + \ldots + ٤٠$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٤٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٤٠\,(٤٠ + ١)\,(٤٠ + ٢)}{٣} = ٢٢٩٦٠$$

$$= \frac{٤٠ \times ٤١ \times ٤٢}{٣}$$

هـ) $\underset{ر=١}{\overset{٥٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + ... + ٥٠^{٢} + ١ + ٢ + ... + ٥٠$

$$\underset{ر=١}{\overset{٥٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٥٠\,(٥٠ + ١)\,(٥٠ + ٢)}{٣}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{٥٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٥٠ \times ٥١ \times ٥٢}{٣} = ٤٤٢٠٠$$

و) $\underset{ر=١}{\overset{٦٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = ١^{٢} + ٢^{٢} + ... + ٦٠^{٢} + ١ + ٢ + ... + ٦٠$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٦٠\,(٦٠ + ١)\,(٦٠ + ٢)}{٣}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{٦٠}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} + ر = \frac{٦٠ \times ٦١ \times ٦٢}{٣} = ٧٥٦٤٠$$

مثـال (٣)

أوجد الصيغة الرياضية الخاصة بحاصل جمع:

٤ + ١٤ + ٣٠ + ٥٢ + ٨٠ + ١١٤ + ... إلى ن من الحدود

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب لابد من إيجاد الحد العام، ولإيجاده تتبع طريقة الفروق وهذه الطريقة صالحة فى حالة ما إذا كان الحد العام دالة جذرية صحيحه فى ن.

٤   ١٤   ٣٠   ٥٢   ٨٠   ١١٤

١٠   ١٦   ٢٢   ٢٨   ٣٤

٦   ٦   ٦   ٦

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية: أى على الصورة:

ح ر = أ ر^{٢} + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فى المعادلات الثلاث التالية:

٤ = أ + ب + جـ .... (١)

١٤ = ٤أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

٣٠ = ٩أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب حيث:

أ = ٣

ب = ١

جـ = ٠

∴ ح ر = ٣ر^{٢} + ر

∴ $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}$ ح ر = $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}$ ٣ر^{٢} + ر

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ٣ر^{٢} + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ر$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = \frac{٣\ ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٦} + \frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٢} + \frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = \frac{ن(ن + ١)\ (٢ن + ١ + ١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = \frac{ن(ن + ١) \times ٢(ن + ١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = ن\ (ن + ١)\ (ن + ١)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح_ر = ن\ (ن + ١)^{٢}$$

مثال (٤)

أوجد مجموع:

٤ + ١٤ + ٣٠ + ٥٢ + ٨٠ + ١١١٤ + ... إلى:

أ) ١٠ حدود.   جـ) ٢٠ حداً.

ب) ١٥ حداً.   د) ٢٥ حداً.

الحل:

حيث أن $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} \, \text{ح}_ر = ن(ن + ١)^{٢}$ فإن المطلوب يتحدد على أساس الصيغة السابق التوصل إليها فى المثال السابق كما يلى:

أ) $\text{مجـ}_{ر=١}^{١٠} \, \text{ح}_ر = \text{مجـ}_{ر=١}^{١٠} \, ٣ر^{٢} + ر$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} \, \text{ح}_ر = (٣ \times ١ + ١) + (٣ \times ٢^{٢} + ٢) + (٣ \times ٣^{٢} + ٣)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + (٣ \times ١٠^{٢} + ١٠)$$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{١٠} \, ٣ر^{٢} + ر = ١٠ \, (١٠ + ١)^{٢}$$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{١٠} \, ٣ر^{٢} + ر = ١٠ \times (١١) = ١٠ \times ١٢١ = ١٢١٠$$

ب) $\text{مجـ}_{ر=١}^{١٥} \, \text{ح}_ر = \text{مجـ}_{ر=١}^{١٥} \, ٣ر^{٢} + ر$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{١٥} \, \text{ح}_ر = (٣ \times ١ + ١) + (٣ \times ٢^{٢} + ٢) + (٣ \times ٣^{٢} + ٣)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + (٣ \times ١٥^{٢} + ١٥)$$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{١٥} \, ٣ر^{٢} + ر = ١٥ \, (١٥ + ١)^{٢}$$

$$\text{مجـ}_{ر=١}^{١٥} \, ٣ر^{٢} + ر = ١٥ \times ٢٥٦ = ٣٨٤٠$$

جـ) $\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ح}_\text{ر} = \sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} ٣\text{ر}^{٢} + \text{ر}$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ح}_\text{ر} = (٣ \times ١+١)+(٣ \times ٢^{٢}+ ٢)+ .... +(٣ \times ٢٠^{٢}+ ٣٠)$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} ٣\text{ر}^{٢} + \text{ر} = ٢٠ \, (٢٠ + ١)^{٢}$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} ٣\text{ر}^{٢} + \text{ر} = ٢٠ \times ٤٤١ = ٨٨٢٠$

د) $\sum_{\text{ر}=١}^{٢٥} \text{ح}_\text{ر} = \sum_{\text{ر}=١}^{٢٥} ٣\text{ر}^{٢} + \text{ر}$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٥} \text{ح}_\text{ر} = (٣ \times ١ + ١) + (٣ \times ٢^{٢} + ٢) + ... + (٣ \times ٢٥^{٢} + ٢٥)$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٥} \text{ح}_\text{ر} = ٢٥ \, (٢٥ + ١)^{٢}$

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٥} \text{ح}_\text{ر} = ٢٥ \times ٦٧٦ = ١٦٩٠٠$

مثـال (٥)

أوجد مجموع:

٣ + ١٠ + ٢١ + ٣٦ + ٥٥ + ٧٨ + ... إلى:

أ) ٨ حدود.　　　　جـ) ١٧ حداً.

ب) ١٢ حداً.　　　　　　　　د) ١٩ حداً.

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أي حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق. وذلك على النحو التالي:

٣　　　١٠　　　٢١　　　٣٦　　　٥٥　　　٧٨

٧　　　١١　　　١٥　　　١٩　　　٢٣

٤　　　٤　　　٤　　　٤

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية: أي على الصورة:

$ح_ر = أر^2 + ب ر + حـ$

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ في المعادلات الثلاث التالية:

٣ = أ + ب + جـ .... (١)

١٠ = ٤أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

٢١ = ٩أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب حيث:

أ = ٢

ب = ١

جـ = ٠

$\therefore ح_ر = ٢ر^2 + ر$

ويكون $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢} + ر$

أى أن $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢} + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ر$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{٢ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٦} + \frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٣} + \frac{ن\ (ن + ١)}{٢} \qquad (١)$$

ويمكن إيجاد قانون أخر على النحو التالى:

$$\because \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{٢ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٦} + \frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{٢ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١) + ٣ن\ (ن + ١)}{٦}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ [٢(٢ن + ١) + ٣]}{٦}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٤ن + ٥)}{٦} \qquad (٢)$$

ولإيجاد المجموع بتطبيق القانون (١) يتسع ما يأتى:

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢} + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ \text{ح} = (٢\times١+١) + (٢\times٢^{٢}+٢) + \ldots\ldots + (٢\times٨^{٢}+٨)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = \frac{٨\times٩\times١٧}{٣} + \frac{٨\times٩}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = ٤٠٨ + ٣٦ = ٤٤٤$$

ب) $$\underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ \text{ح} = \underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر$$

$$\underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = (٣\times١+١)+(٢\times٢^{٢}+٢) + \ldots\ldots (٣\times١٢^{٢}+١٢)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = \frac{١٢\times١٣\times٢٥}{٣} + \frac{١٣\times١٢}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = ١٣٠٠ + ٧٨ = ١٣٧٨$$

جـ) $$\underset{ر=١}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}}\ \text{ح} = \underset{ر=١}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر$$

$$\underset{ر=١}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = (٢\times١+١)+(٢\times٢^{٢}+٢) + \ldots\ldots + (٢\times١٧^{٢}+١٧)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٢}+ر = \frac{١٧\times١٨\times٣٥}{٣} + \frac{١٧\times١٨}{٢}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٧} ٢\text{ر}^{٢} + \text{ر} = ٣٥٧٠ + ١٥٣ = ٣٧٢٣$$

د) $$\sum_{\text{ر}=١}^{١٩} \text{ح}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=١}^{١٩} ٢\text{ر}^{٢} + \text{ر}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٩} ٢\text{ر}^{٢}+\text{ر} = (٢\times١+١)+(٢\times٢^{٢}+٢) +......+(٢\times ١٩^{٢}+١٩)$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٩} ٢\text{ر}^{٢} + \text{ر} = \frac{١٩\times٢٠\times٣٩}{٣} + \frac{١٩\times٢٠}{٢}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٩} ٢\text{ر}^{٢} + \text{ر} = ٤٩٤٠ + ١٩٠ = ٥١٣٠$$

ويمكن التوصل إلى نفس النتائج السابقة بتطبيق القانون (٢) حيث:

أ) $$\sum_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{٨ \times ٩ \times ٣٧}{٦} = ٤٤٤$$

ب) $$\sum_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{١٢ \times ١٣ \times ٥٣}{٦} = ١٣٧٨$$

حـ) $$\sum_{\text{ر}=١}^{١٧} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{١٧ \times ١٨ \times ٧٣}{٦} = ٣٧٢٣$$

د) $$\sum_{\text{ر}=١}^{١٩} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{١٩ \times ٢٠\times٨١}{٦} = ٥١٣٠$$

مثـال (٦)

أوجد مجموع:

٥ + ١٨ + ٣٩ + ٦٨ + ١٠٥ + ١٥٠ + ... إلى:

أ) ٦ حدود.　　　　جـ) ١٤ حداً.

ب) ١٠ حداً.　　　　د) ٢٠ حداً.

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أي حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق. وذلك على النحو التالي:

٥	١٨	٣٩	٦٨	١٠٥	١٥٠
١٣	٢١	٢٩	٣٧	٤٥	
٨	٨	٨	٨		

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية: أي على الصورة:

$ح_ر$ = أر^٢ + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ في المعادلات الثلاث التالية:

٥ = أ + ب + جـ .... (١)

١٨ = ٤أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

٣٩ = ٩أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب حيث:

أ = ٤

ب = ١

جـ = ٠

$\therefore \text{ح}_\text{ر} = \text{٤ ر}^{٢} + \text{ر}$

ويكون $\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{٤ر}^{٢} + \text{ر}$

أى أن $\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{٤ر}^{٢} + \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ر}$

$$\therefore \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{٤ن (ن + ١) (٢ن + ١)}}{\text{٦}} + \frac{\text{ن (ن + ١)}}{\text{٢}}$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{٢ن (ن + ١) (٢ن + ١)}}{\text{٣}} + \frac{\text{ن (ن + ١)}}{\text{٢}} \qquad \text{(١)}$$

ويمكن إيجاد قانون أخر على النحو التالى:

$$\because \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{٤ن (ن + ١) (٢ن + ١)}}{\text{٦}} + \frac{\text{ن (ن + ١)}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{٤ن (ن + ١) (٢ن + ١) + ٣ن (ن + ١)}}{\text{٦}}$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{ن (ن + ١) [٤(٢ن + ١) + ٣]}}{\text{٦}}$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن (ن + ١) (٨ن + ٧)}}{\text{٦}} \qquad (\text{٢})$$

ويتحدد المجموع المطلوب فى الحالات السابقة كما يلى:

أ) $\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{٦}}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{\text{ر}} = \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{٦}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر}$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{٦}}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{\text{ر}} = (\text{٤}\times\text{١}+\text{١}) + (\text{٤} \times \text{٤}^{\text{٢}} + \text{٢}) + \ldots\ldots + (\text{٤} \times \text{٦}^{\text{٢}} + \text{٦})$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{٦}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر} = \frac{\text{١٢} \times \text{٧} + \text{١٣}}{\text{٣}} + \frac{\text{٦} \times \text{٧}}{\text{٢}}$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{٦}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر} = \text{٣٦٤} + \text{٢١} = \text{٣٨٥}$$

ب) $\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٠}}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{\text{ر}} = \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٠}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر}$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٠}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}}+\text{ر} = (\text{٤} \times\text{١}+\text{١})+(\text{٤}\times\text{٢}^{\text{٢}}+\text{٢}) + \ldots\ldots + (\text{٤}\times\text{١٠}^{\text{٢}} + \text{١٠})$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٠}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر} = \frac{\text{٢٠}\times\text{١١}\times\text{٢١}}{\text{٣}} + \frac{\text{١٠}\times\text{١١}}{\text{٢}}$$

$$\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٠}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر} = \text{١٠٤٠} + \text{٥٥} = \text{١٠٩٥}$$

جـ) $\underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٤}}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{\text{ر}} = \underset{\text{ر=١}}{\overset{\text{١٤}}{\text{مجـ}}}\ \text{٤ر}^{\text{٢}} + \text{ر}$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٤}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = (٤\times١+١)+(٤\times٢^٢+٢)+......+(٤\times١٤^٢+١٤)$$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٤}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = \frac{٢٨\times١٥\times٢٩}{٣} + \frac{١٤\times١٥}{٢}$$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٤}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = ٤٠٦٠ + ١٠٥ = ٤١٦٥$$

د) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_\text{ر} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر}$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = (٤\times١+١)+(٤\times٢^٢+٢)+......+(٤\times٢٠^٢+٢٠)$$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = \frac{٤٠\times٢١\times٤١}{٣} + \frac{٢٠\times٢١}{٢}$$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}}\ ٤\text{ر}^٢+\text{ر} = ١١٤٨٠ + ٢١٠ = ١١٦٩٠$$

ويمكن التوصل إلى نفس النتائج السابقة بتطبيق القانون (٢) حيث:

أ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_\text{ر} = \frac{٦\times٧\times٥٥}{٦} = ٣٨٥$

ب) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_\text{ر} = \frac{١٠\times١١\times٨٧}{٦} = ١٥٩٥$

حـ) $\underset{ر=1}{\overset{14}{مجـ}}$ حر = $\frac{14 \times 15 \times 119}{6}$ = ٤١٦٥

د) $\underset{ر=1}{\overset{20}{مجـ}}$ حر = $\frac{20 \times 21 \times 167}{6}$ = ١١٦٩٠

مثـال (٧)

أوجد مجموع:

١٣ + ٥٠ + ١١١ + ١٩٦ + ٣٠٥ + ٤٣٨ + ... إلى:

أ) ٦ حدود. ب) ٨ حداً.

جـ) ١٠ حداً.

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أى حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق. وذلك على النحو التالى:

١٣ ٥٠ ١١١ ١٩٦ ٣٠٥ ٤٣٨

٣٧ ٦١ ٨٥ ١٠٩ ١٣٣

٢٤ ٢٤ ٢٤ ٢٤

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية: أى على الصورة:

حر = أر^2 + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فى المعادلات الثلاث التالية:

$$١٣ = أ + ب + جـ \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

$$٥٠ = ٤أ + ٢\,ب + جـ \;\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

$$١١١ = ٩أ + ٣\,ب + جـ \;\ldots\ldots\ldots \quad (٣)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل لى قيم أ ، ب حيث:

$$أ = ١٢$$

$$ب = ١$$

$$جـ = ٠$$

$$\therefore \; ح_ر = ١٢ر^{٢} + ر$$

ويكون $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = \sum_{ر=١}^{ن} ١٢ر^{٢} + ر$

أى أن $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = \sum_{ر=١}^{ن} ١٢ر^{٢} + \sum_{ر=١}^{ن} ر$

$$\therefore \; \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = \frac{١٢ن\,(ن+١)(٢ن+١)}{٦} + \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ٢\,ن\,(ن+١)\,(٢ن+١) + \frac{ن\,(ن+١)}{٢} \qquad (١)$$

ويمكن إيجاد قانون أخر على النحو التالى:

$$\because \; \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = \frac{١٢ن(ن+١)\,(٢ن+١)}{٦} + \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$$

$$\therefore \; \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = \frac{٤ن\,(ن+١)\,(٢ن+١) + ن\,(ن+١)}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حر} = \frac{\text{ن (ن + ١) [٤(٢ن + ١) + ١]}}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حر} = \frac{\text{ن (ن +١) (٨ن+٤+١)}}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حر} = \frac{\text{ن (ن + ١) (٨ ن + ٥)}}{٢} \qquad (٢)$$

ويكون المجموع المطلوب فى الحالات السابقة بتطبيق القانون (١) كما يلى:

أ) $$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٦} \text{حر} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٦} \text{١٢ر}^{٢} + \text{ر}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٦} \text{حر} = (١٢\times١+١) + (١٢\times٢^{٢} + ٢) + ... + (١٢\times٦^{٢}+٦)$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٦} \text{١٢ر}^{٢} + \text{ر} = ١٢ \times ٧ \times ١٣ + \frac{٦ \times ٧}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٦} \text{١٢ر}^{٢} + \text{ر} = ١٠٩٢ + ٢١ = ١١١٣$$

ب) $$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٨} \text{حر} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٨} \text{١٢ر}^{٢} + \text{ر}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٨} \text{١٢ر}^{٢}+\text{ر} = (١٢\times١+١)+(١٢\times٢^{٢}+٢) + ... (١٢\times٨^{٢}+ ٨)$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{٨} \text{١٢ر}^{٢} + \text{ر} = ١٦\times ٩ \times ١٧ + \frac{٨ \times ٩}{٢}$$

$$\times ٢٤٤٨ + ٣٦ = ٢٤٨٤$$

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ حر = \underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ ١٢ر^{٢} + ر$

$\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ ١٢ر^{٢}+ر = (١٢\times١+١)+(١٢\times٢^{٢}+٢)+.....(١٢\times١٠^{٢}+ ١٠)$

$\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ ١٢ر^{٢} + ر = ٢٠\times١١\times ٢١ + \frac{١٠ \times ١١}{٢}$

$\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ ١٢ر^{٢} + ر = ٤٦٢٠ + ٥٥ = ٤٦٧٥$

ويمكن التوصل إلى نفس النتائج السابقة بتطبيق القانون (٢) حيث:

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ حر = \frac{٦ \times ٧ \times ٥٣}{٢} = ١١١٣$

ب) $\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ حر = \frac{٨ \times ٩ \times ٦٩}{٢} = ٢٤٨٤$

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}}\ حر = \frac{١٠ \times ١١ \times ٨٥}{٢} = ٤٦٧٥$

مثال (٨)

أوجد مجموع:

٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + ٣٥ + ٤٨ + ... إلى:

أ) ٩ حدود. ب) ١٧ حداً.

جـ) ٢٠ حداً. د) ٢٧ حداً.

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أى حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق حيث:

٣	٨	١٥	٢٤	٣٥	٤٨
٥	٧	٩	١١	١٣	
٢	٢	٢	٢		

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية: أى على الصورة:

$ح_ر = أر^{٢} + ب ر + حـ$

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ في المعادلات الثلاث التالية:

٣ = أ + ب + جـ .... (١)

٨ = ٤أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

١٥ = ٩أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب حيث:

أ = ١

ب = ٢

جـ = ٠

$\therefore ح_ر = ر^{٢} + ٢ر$

ويكون $\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^{٢} + ٢ر$

$$\underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح = \underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ر^{٢} + \underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ٢ر$$

$$\therefore \underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح = \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١)}{٦} + \frac{٢ن(ن + ١)}{٢}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح = \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١) + ٦ن(ن + ١)}{٦}$$

$$\underset{ر=1}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ح = \frac{ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ٧)}{٦}$$

والمجموع المطلوب فى الحالات السابقة يتحدد كما يلى:

أ) $\underset{ر=1}{\overset{٩}{\text{مجـ}}} ح = \underset{ر=1}{\overset{٩}{\text{مجـ}}} ر^{٢} + ٢ر$

$$= (١^{٢}+٢\times١) + (٢^{٢} + ٢ \times ٢) + ... + (٩^{٢} + ٢ \times ٩)$$

$$= \frac{٩\,(٩ + ١)\,(٢ \times ٩ + ٧)}{٦}$$

$$= \frac{٩ \times ١٠ \times ٢٥}{٦} = ٣٧٥$$

ب) $\underset{ر=1}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}} ح = \underset{ر=1}{\overset{١٧}{\text{مجـ}}} ر^{٢} + ٢ر$

$$= \frac{١٧\,(١٧ + ١)\,(٢\times١٧ + ٧)}{٦}$$

$$= \frac{١٧\times١٨\times٤١}{٦} = ٢٠٩١$$

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٢٠}{مجـ}}$ ح = $\underset{ر=١}{\overset{٢٠}{مجـ}}$ ر^{٢} + ٢ ر

$$= \frac{٢٠\ (٢٠ + ١)\ (٢\times٢٠+٧)}{٦}$$

$$= \frac{٢٠ \times ٢١ \times ٤٧}{٦} = ٣٢٩٠$$

د) $\underset{ر=١}{\overset{٢٧}{مجـ}}$ ح = $\underset{ر=١}{\overset{٢٧}{مجـ}}$ ر^{٢} + ٢ ر

$$= \frac{٢٧\ (٢٧ + ١)\ (٢\times٢٧+٧)}{٦}$$

$$= \frac{٢٧ \times ٢٨ \times ٦١}{٦} = ٧٦٨٦$$

مثال (٩)

أوجد مجموع:

٤ + ١٠ + ١٨ + ٢٨ + ٤٠ + ٥٤ + ... إلى:

(أ) ١٠ حدود　　　(جـ) ٢٠ حداً

(ب) ١٥ حداً　　　(د) ٢٥ حداً

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أى حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق حيث:

٤   ١٠   ١٨   ٢٨   ٤٠   ٥٤

٦   ٨   ١٠   ١٢   ١٤

٢   ٢   ٢   ٢

ويكون الحد العام من الدرجة الثانية أى على الصورة:

حر + أ ر^{٢} + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ في المعادلات الثلاث الآتية:

٤ = أ + ب + جـ .... (١)

١٠ = ٤أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

١٨ = ٩أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب حيث:

أ = ١

ب = ٣

جـ = ٠

∴ حر = ر^{٢} + ٣ر

ويكون مجـ$_{ر=١}^{ن}$ حر = مجـ$_{ر=١}^{ن}$ ر^{٢} + مجـ$_{ر=١}^{ن}$ ٣ر

$$\therefore \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6} + \frac{3\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$$

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1) + 9\text{ن}(\text{ن}+1)}{6}$$

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+10)}{6}$$

والمجموع المطلوب فى الحالات السابقة يتحدد كما يلى:

أ) $\sum_{\text{ر}=1}^{10} \text{حـ}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=1}^{10} \text{ر}^2 + 3\,\text{ر}$

$$= \frac{10\,(10+1)\,(2\times10+10)}{6}$$

$$= \frac{10\times11\times30}{6} = 550$$

ب) $\sum_{\text{ر}=1}^{15} \text{حـ}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=1}^{15} \text{ر}^2 + 3\,\text{ر}$

$$= \frac{15\,(15+1)\,(2\times15+10)}{6}$$

$$= \frac{15\times16\times40}{6} = 1600$$

جـ) $\sum_{\text{ر}=1}^{20} \text{حـ}_{\text{ر}} = \frac{20\,(20+1)\,(2\times20+10)}{6}$

$$= \frac{٢٠ \times ٢١ + ٥٠}{٦} = ٣٥٠٠$$

د) $\underset{ر=١}{\overset{٢٥}{مجـ}}$ ر $= \frac{٢٥\ (٢٥+١)\ (٢\times٢٥+١٠)}{٦}$

$$= \frac{٢٦ \times ٢٦ + ٦٠}{٦} = ٦٥٠٠$$

التطبيق الرابع

حقق بالأستنتاج الرياضى أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\ ر^{٣} = \frac{ن^{٢}}{٤}(ن + ١)^{٢} = \left[\frac{ن\ (ن+١)}{٢}\right]^{٢}$$

المطلوب إثباته فى هذا التطبيق أن:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots\ ن^{٣} = \frac{ن^{٢}}{٤}(ن + ١)^{٢}$$

$$= \left[\frac{ن\ (ن + ١)}{٢}\right]^{٢}$$

ولإثبات ذلك يمكن التحقق من صحة القانون فى حالات متتابعة كما يلى:

(١) إذا كانت ن = ١

الطرف الأيمن = $١^{٣} = ١$

الطرف الأيسر = $\frac{١^{٢}}{٤}(١ + ١)^{٢} = \left[\frac{١\ (١ + ١)}{٢}\right]^{٢} = ١$

وهذا يعنى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ١

(٢) إذا كانت ن = ٢

الطرف الأيمن = $١^{٣} + ٢^{٣} = ٩$

الطرف الأيسر = $\frac{٢^{٢}}{٤}(٢ + ١)^{٢} = [\frac{٢(٢ + ١)}{٢}]^{٢} = ٩$

أى أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٢

(٣) إذا كانت ن = ٣

الطرف الأيمن = $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} = ٣٦$

الطرف الأيسر = $\frac{٣^{٢}}{٤}(٣ + ١)^{٢} = [\frac{٣(٣ + ١)}{٢}]^{٢} = ٣٦$

وهذا يؤكد أن القانون صحيح إذا كانت ن = ٣.

ولإثبات صحة القانون فى صورته العامة نفرض أنه صحيح فى حالة ن = م أى أن:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + م^{٣} = \frac{م^{٢}}{٤}(م+١)^{٢} = [\frac{م(م+١)}{٢}]^{٢}$$

أى أن $\sum_{ر=١}^{م} ر^{٣} = \frac{م^{٢}}{٤}(م+١)^{٢} = [\frac{م(م + ١)}{٢}]^{٢}$ .... (١)

وبإضافة $(م + ١)^{٣}$ إلى طرفى المتطابقة (١) فإنه يكون لدينا:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + م^{٣} + (م+١)^{٣} = \frac{م^{٢}}{٤}(م+١)^{٢} + (م+١)^{٣}$$

$$\sum_{ر=١}^{م+١} ر^{٣} = \frac{م^{٢}(م + ١)^{٢} + ٤(م + ١)^{٣}}{٤}$$

$$\sum_{ر=١}^{م+١} ر^{٣} = \frac{(م + ١)^{٢}(م^{٢} + ٤م + ٤)}{٤}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{م}+١} \text{ر}^{٣} = \left[\frac{(\text{م}+١)^{٢} (\text{م}+١+١)^{٢}}{٤}\right] \quad .... \quad (٢)$$

ويلاحظ أن المتطابقة (٢) لها نفس صورة المتطابقة (١) بإحلال م+١ محل م. وهذا يعنى أنه إذا كان القانون صحيحاً فى حالة ن = م، فهو صحيح أيضاً فى حالة ن = م+١.

التطبيق الخامس

حقق بالاستنتاج الرياضى أن:

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \left(\text{ر}^{٣} + \text{ر}\right) = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(\text{ن}^{٢}+\text{ن}+٢)}{٤}$$

المطلوب إثباته فى هذا التطبيق هو أن:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + \text{ن}^{٣} + ١ + ٢ + ... + \text{ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(\text{ن}^{٢}+\text{ن}+٢)}{٤}$$

ولتحقيق هذا القانون بالاستنتاج الرياضى يتبع المنطق الاستقرائى أولاً، ثم المنطق القياسى، وإتباع المنطق الاستقرائى يتم عن طريق التحقق من صحة القانون فى حالات متتابعة كما يلى:

١- إذا كانت ن = ١

$$\text{الطرف الأيمن} = ١^{٣} + ١ = ٢$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{١(١+١)(١^{٢}+١+٢)}{٤} = ٢$$

أى أن القانون صحيح فى حالة ن = ١

٢- إذا كانت ن = ٢

الطرف الأيمن = $١^٣ + ٢^٣$ + ١ + ٢ = ١٢

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٢\ (٢ + ١)\ (٢^٢ + ٢ + ٢)}{٤} = ١٢$$

وتساوى الطرفين يعنى صحة القانون فى حالة ن = ٢.

٣- إذا كانت ن = ٣

الطرف الأيمن = $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣$ + ١ + ٢ + ٣ = ٤٢

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{٣\ (٣ + ١)\ (٣^٢ + ٣ + ٢)}{٤} = ٤٢$$

وتساوى الطرفين يعنى صحة القانون فى حالة ن = ٣.

أما المنطق القياسى فتطبيقه يتضمن إثبات صحة القانون فى صورته العامة ويتم ذلك عن طريق وضع فرض صحة القانون فى حالة ن = م، ثم إضافة حد جديد وهو م + ١، وبذلك تحصل على متطابقتين. فإذا كانت المتطابقتين لهما نفس الصورة فيكون القانون صحيحاً على الإطلاق. وفى هذا الإطار يكون تطبيق المنطق القياسى على النحو التالى:

نفرض أن القانون صحيح فى حالة ن = م، أى أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{م}{\text{مجـ}}}\ ر^٣ + ر = \frac{م\ (م + ١)\ (م^٢ + م + ٢)}{٤} \quad ..... \quad (١)$$

أى أن:

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ... + م^٣ + ١ + ٢ + ... + م$$

$$= \frac{م\,(م + ١)\,(م^{٢} + م + ٢)}{٤}$$

وبإضافة الحد الجديد لطرفى المتطابقة (١) ينتج أن:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + \dots + م^{٣} + (م+١)^{٣} + ١ + ٢ + \dots + م + (م + ١)$$

$$= \frac{م\,(م + ١)\,(م^{٢} + م + ٢)}{٤} + (م + ١)^{٣} + (م+١)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر$$

$$= \frac{م\,(م+١)\,(م^{٢}+م+٢) + ٤(م+١)\,(م+١)\,(م+١) + ٤(م+١)}{٤}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر = \frac{(م+١)\,[م(م^{٢}+م+٢) + ٤(م+١)^{٢} + ٤]}{٤}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر = \frac{(م+١)\,(م^{٣} + ٥م^{٢} + ١٠م + ٨)}{٤}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر = \frac{(م+١)\,(م + ٢)\,(م^{٢} + ٣م + ٤)}{٤}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر = \frac{(م+١)\,(م + ٢)\,[(م + ١)^{٢} + (م+٣)]}{٤}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{م+١}{مجـ}} ر^{٣} + ر = \frac{(م+١)\,(م + ١+١)\,[(م+١)^{٢}+م+١+٢]}{٤} \qquad (٢)$$

ويلاحظ أن المتطابقة (٢) لها نفس صورة المتطابقة (١) بإحلال م+١ محل م، فإذا كان القانون صحيحاً فى حالة ن=م، فهو صحيح أيضاً فى حالة

ن = م+١. وهذا يؤكد صحة القانون بصفة عامة، أى عندما ن = أى عدد صحيح موجب.

مثال (١٠)

أوجد مجموع:

٢ + ١٠ + ٣٠ + ٦٨ + ١٣٠ + ٢٢٢ + ... إلى

(أ) ٦ حدود (جـ) ١٢ حداً

(ب) ١٠ حداً (د) ١٥ حداً

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب نوجد الحد العام باستخدام طريقة الفروق كما يلى:

٢ ١٠ ٣٠ ٦٨ ١٣٠ ٢٢٢

٨ ٢٠ ٣٨ ٦٢ ٩٢

١٢ ١٨ ٢٤ ٣٠

٦ ٦ ٦

يكون الحد العام من الدرجة الثالثة أى على الصورة:

ح$_{ر}$ + أ ر^{٣} + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فيكون لدينا:

٢ = أ + ب + جـ .... (١)

١٠ = ٨أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

$٣٠ = ٢٧أ + ٣ب + جـ$ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب، جـ حيث:

$أ = ١$

$ب = ١$

$جـ = ٠$

$\therefore ح_ر = ر^٣ + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٣ + ر$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر^٣ + \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ر$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}} ح_ر = \frac{ن (ن + ١) (ن^٢ + ن + ٢)}{٤}$$

فإن المطلوب يتحدد كما يلى:

(أ) $\underset{ر=١}{\overset{٦}{مجـ}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{٦}{مجـ}} ر^٣ + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{مجـ}} ر^٣ + ر = ١ + ١ + ٢^٣ + ٢ + ... + ٦^٣ + ٦$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{مجـ}} ر^٣ + ر = \frac{٦ \times ٧ \times ٤٤}{٤} = ٤٦٢$$

(ب) $\underset{ر=١}{\overset{١٠}{مجـ}} ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{١٠}{مجـ}} ر^٣ + ر$

$$\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = ١ + ١ + ٢^{٣} + ٢ + ... + ١٠^{٣} + ١٠$$

$$\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = \frac{١٠ \times ١١ \times ١١٢}{٤} = ٣٠٨٠$$

(جـ) $$\overset{١٢}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ح = \overset{١٢}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر$$

$$\overset{١٢}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = ١ + ١ + ٢^{٣} + ٢ + ... + ١٢^{٣} + ١٢$$

$$\overset{١٢}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = \frac{١٢ \times ١٣ \times ١٥٨}{٤} = ٦١٦٢$$

(جـ) $$\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ح = \overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر$$

$$\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = ١ + ١ + ٢^{٣} + ٢ + ... + ١٥^{٣} + ١٥$$

$$\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}\ ر^{٣} + ر = \frac{١٥ \times ١٦ \times ٢٤٢}{٤} = ١٤٥٢٠$$

مثال (١١)

أوجد مجموع:

٣ + ١٨ + ٥٧ + ١٣٢ + ٢٥٥ + ٤٣٨ + ... إلى:

(أ) ٦حدود (جـ) ١٠ حدود

(ب) ٨ حدود (د) ١٢ حداً.

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب يتعيـن إيجـاد الحـد العـام باسـتخدام طريقـه الفروق كما يلى:

٣		١٨		٥٧		١٣٢		٢٥٥		٤٣٨
	١٥		٣٩		٧٥		١٢٣		١٨٣	
		٢٤		٣٦		٤٨		٦٠		
			١٢		١٢		١٢			

يكون الحد العام من الدرجة الثالثة أى على الصورة:

حر + أ ر^{٣} + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب، جـ نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فيكون لدينا:

٣ = أ + ب + جـ .... (١)

١٨ = ٨أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

٥٧ = ٢٧أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب، جـ حيث:

أ = ٢

ب = ١

جـ = ٠

∴ حر = ٢ ر^{٣} + ر

أى أن $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{حر} = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣} + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{حر} = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣} + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ر$$

$$\therefore \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{حر} = \frac{٢ن^{٢}}{٤}(ن+١)^{٢} + \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{ر} = \frac{ن^{٢}\,(ن+١)^{٢} + ن\,(ن+١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{ر} = \frac{ن\,(ن+١)\,[ن\,(ن+١)+١]}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ \text{ح}_{ر} = \frac{ن\,(ن+١)\,(ن^{٢}+ن+١)}{٢}$$

وعلى ذلك فإن المجموع المطلوب يتحدد كما يلى:

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ \text{حر} = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣} + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣}+ر = (٢\times١+١)+(٢\times٢^{٣}+٢)+.....+(٢\times٦^{٣}+٦)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣}+ر = \frac{٦\times٧\times٤٣}{٢} = ٩٠٣$$

ب) $\underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ \text{حر} = \underset{ر=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ٢ر^{٣} + ر$

$$\sum_{ر=1}^{8} ٢ر^٣ + ر = (٢×١+١) + (٢×٢^٣+٢) + ... (٢×٨^٣+ ٨)$$

$$\sum_{ر=1}^{8} ٢ر^٣ + ر = \frac{٨ \times ٩ \times ٧٣}{٢} = ٢٦٢٨$$

جـ) $\sum_{ر=1}^{10} ح = \sum_{ر=1}^{10} ٢ر^٣ + ر$

$$\sum_{ر=1}^{10} ٢ر^٣ + ر = (٢×١+١) + (٢×٢^٣+٢) + ... (٢×١٠^٣+ ١٠)$$

$$\sum_{ر=1}^{10} ٢ر^٣ + ر = \frac{١٠ \times ١١ \times ١١١}{٢} = ٦١٠٥$$

د) $\sum_{ر=1}^{12} ح = \sum_{ر=1}^{12} ٢ر^٣ + ر$

$$\sum_{ر=1}^{12} ٢ر^٣ + ر = (٢×١+١) + (٢×٢^٣+٢) + ... (٢×١٢^٣+ ١٢)$$

$$\sum_{ر=1}^{12} ٢ر^٣ + ر = \frac{١٢ \times ١٣ \times ١٥٧}{٢} = ١٢٢٤٦$$

مثـال (١٣)

أوجد مجموع:

٥ + ٣٤ + ١١١ + ٢٦٠ + ٥٠٥ + ٨٧٠ + ... إلى

(أ) ٦ حدود　　　(جـ) ١٥ حداً

(ب) ١٠ حدود　　　(د) ٢٠ حداً

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب نوجد الحد العام باستخدام طريقة الفروق كما يلى:

٥	٣٤	١١١	٢٦٠	٥٠٥	٨٧٠
٢٩	٧٧	١٤٩	٢٤٥	٣٦٥	
٤٨	٧٢	٩٦	١٢٠		
٢٤	٢٤	٢٤			

يكون الحد العام من الدرجة الثالثة أى على الصورة:

$ح_ر$ + أ $ر^٣$ + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب، جـ نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فيكون لدينا:

٥ = أ + ب + جـ .... (١)

٣٤ = ٨أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

١١١ = ٢٧أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ ، ب، جـ حيث:

أ = ٤

ب = ١

جـ = ٠

∴ $ح_ر$ = ٤$ر^٣$ + ر

ويكون $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٤ر^{٣} + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٤ر^{٣} + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ر$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{٤ن^{٢}}{٤}(ن+١)^{٢} + \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = ن^{٢}(ن+١)^{٢} + \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{٢ن^{٢}(ن+١)^{٢} + ن(ن+١)}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{ن(ن+١)\ [٢ن(ن+١)+١]}{٢}$$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \frac{ن(ن+١)\ (٢ن^{٢}+٢ن+١)}{٢}$$

وترتيباً على ذلك فإن المجموع المطلوب يتحدد كما يلي:

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ح_ر = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ٤ر^{٣} + ر$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٤ر^{٣}+ر = (٤\times١+١)+(٤\times٢^{٣}+٢)+.....+(٤\times٦^{٣}+٦)$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٤ر^{٣}+ر = \frac{٦\times٧\times٨٥}{٢} = ١٧٨٥$$

ب) $\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = $\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ٤ر^{٣} + ر

$\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ٤ر^{٣}+ر = (٤×١+١)+(٤×٢^{٣}+٢)+.....+(٤×١٠^{٣}+ ١٠)

$\overset{١٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ٤ر^{٣} + ر = $\frac{\text{١٠ × ١١ × ٢٢١}}{\text{٢}}$ = ١٢١٥٥

جـ) $\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = $\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ٤ر^{٣} + ر

$\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = (٤×١+١)+(٤×٢^{٣}+٢)+.....+(٤×١٥^{٣}+ ١٥)

$\overset{١٥}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = $\frac{\text{١٥ × ١٦ × ٤٨١}}{\text{٢}}$ = ٥٧٧٢٠

د) $\overset{٢٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = $\overset{٢٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ٤ر^{٣} + ر

$\overset{٢٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = (٤×١+١)+(٤×٢^{٣}+٢)+.....+(٤×٢٠^{٣}+ ٢٠)

$\overset{٢٠}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}}$ ح = $\frac{\text{٢٠ × ٢١ × ٨٤١}}{\text{٢}}$ = ١٧٦٦١٠

مثال (١٣)

أوجد مجموع:

٣ + ١٢ + ٢٣ + ٧٢ + ١٣٥ + ٢٢٨ + ... إلى

(أ) ٨ حدود　　　　(جـ) ١٨ حداً

(ب) ١٢ حداً　　　　(د) ٢٢ حداً

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب في أي حالة من الحالات السابقة يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق، حيث:

٣　　١٢　　٢٣　　٧٢　　١٣٥　　٢٢٨

٩　　٢١　　٣٩　　٦٣　　٩٣

١٢　　١٨　　٢٤　　٣٠

٦　　٦　　٦

يكون الحد العام من الدرجة الثالثة أي على الصورة:

حر + أ ر٣ + ب ر + حـ

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ ، ب، جـ نعوض عن ر = ١، ٢، ٣ فيكون لدينا:

٣ = أ + ب + جـ .... (١)

١٢ = ٨أ + ٢ ب + جـ .... (٢)

٢٣ = ٢٧أ + ٣ ب + جـ .... (٣)

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على قيم أ ، ب، جـ حيث:

أ = ١

ب = ٢

جـ = ٠

$$\therefore \text{ح}_{\text{ر}} = \text{ر}^{٣} + ٢\,\text{ر}$$

أى أن

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} + \text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٢\text{ر}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}^{٢}}{٤}(\text{ن} + ١)^{٢} + \frac{٢\text{ن}\,(\text{ن}+١)}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}^{٢}\,(\text{ن}+١)^{٢} + ٤\text{ن}\,(\text{ن} + ١)}{٤}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)\,[\text{ن}\,(\text{ن} + ١)+٤]}{٢}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)\,(\text{ن}^{٢} + \text{ن} + ٤)}{٤}$$

وعلى ذلك فإن المجموع المطلوب يتحدد كما يلى:

أ)
$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ح}_{\text{ر}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ر}^{٣} + \text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{٨} ٢\,\text{ر}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{٨\,(٨ + ١)\,(٨^{٢} + ٨ + ٤)}{٢} = ١٣٦٨$$

ب)
$$\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{١٢} \text{ح}_{\text{ر}} = \frac{١٢\,(١٢ + ١)\,(١٢^{٢} + ١٢ + ٤)}{٢} = ٦٢٤٠$$

$$\text{جـ) مجـ}\sum_{ر=١}^{١٨} ح_{ر} = \frac{١٨\,(١٨ + ١)\,(١٨^{٢} + ١٨ + ٤)}{٢} = ٢٩٥٨٣$$

$$\text{د) مجـ}\sum_{ر=١}^{٢٢} ح_{ر} = \frac{٢٢\,(٢٢ + ١)\,(٢٢^{٢} + ٢٢ + ٤)}{٢} = ٦٤٥١٥$$

مثال (١٤)

أوجد مجموع:

٤ + ١٤ + ٣٦ + ٧٦ + ١٤٠ + ٢٣٤ + ... إلى:

(أ) ١٠ حدود (جـ) ٢٠ حداً

(ب) ١٥ حدود (د) ٢٥ حداً

الحل:

لإيجاد المجموع المطلوب يتعين إيجاد الحد العام باستخدام طريقة الفروق، حيث:

٤ ١٤ ٣٦ ٧٦ ١٤٠ ٢٣٤

١٠ ٢٢ ٤٠ ٦٤ ٩٤

١٢ ١٨ ٢٤ ٣٠

٦ ٦ ٦

ويكون الحد العام من الدرجة الثالثة، أى على الصورة:

$$ح_{ر} = أر^{٣} + ب\,ر + حـ$$

حيث حـ = ٠

ولإيجاد قيم أ، ب، جـ نعوض عن ر بالقيم ١، ٢، ٣ في المعادلات الثلاث الآتية:

$$\text{٤} = \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{١})$$

$$\text{١٤} = \text{٨أ} + \text{٢ب} + \text{جـ} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{٢})$$

$$\text{٣٦} = \text{٢٧أ} + \text{٣ب} + \text{جـ} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{٣})$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على قيم أ، ب، جـ حيث:

$$\text{أ} = \text{١}$$

$$\text{ب} = \text{٣}$$

$$\text{جـ} = \text{٠}$$

$$\therefore\ \text{ح}_\text{ر} = \text{ر}^{\text{٣}} + \text{٣ ر}$$

أي أن $\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ح}_\text{ر} = \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ر}^{\text{٣}} + \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{٣ر}$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{ن}^{\text{٢}}}{\text{٤}} (\text{ن} + \text{١})^{\text{٢}} + \frac{\text{٣ن}}{\text{٢}} (\text{ن}+\text{١})$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{ن}^{\text{٢}} (\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}} + \text{٦ن} (\text{ن} + \text{١})}{\text{٤}}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{ن} (\text{ن} + \text{١}) [\text{ن} (\text{ن} + \text{١})+\text{٦}]}{\text{٢}}$$

$$\text{مجـ}_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ح}_\text{ر} = \frac{\text{ن} (\text{ن} + \text{١}) (\text{ن}^{\text{٢}} + \text{ن} + \text{٦})}{\text{٤}}$$

والمجموع المطلوب في كل حالة من الحالات السابقة يتحدد كما يلي:

أ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}} \text{ ح} = \underset{\text{ر}=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}} \text{ر}^{٣} + \underset{\text{ر}=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}} ٣\text{ر}$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٠}{\text{مجـ}}} \text{ ح} = \frac{١٠ \, (١٠ + ١) \, (١٠^{٢} + ١٠ + ٦)}{٤} = ٣١٩٠$$

ب) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{١٥}{\text{مجـ}}} \text{ ح} = \dfrac{١٥ \, (١٥ + ١) \, (١٥^{٢} + ١٥ + ٦)}{٤} = ١٤٧٦٠$

جـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٠}{\text{مجـ}}} \text{ ح} = \dfrac{٢٠ \, (٢٠ + ١) \, (٢٠^{٢} + ٢٠ + ٦)}{٤} = ٤٤٧٣٠$

د) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢٥}{\text{مجـ}}} \text{ ح} = \dfrac{٢٥ \, (٢٥ + ١) \, (٢٥^{٢} + ٢٥ + ٦)}{٤} = ١٠٦٦٠٠$

الباب السابع
المتباينات والبرمجة الخطية
Inequalities and linear programming
الفصل الأول: المتباينات

تعبر المتباينات عن العلاقة الترتيبية بين الأعداد الحقيقية. فـإذا كـانت أ، ب أعداداً حقيقية فإن أ تكون أكبر من ب، ويرمز لها بـالرمز أ > ب متـى كـــان أ – ب > صفر (أى أن الفرق مقداراً موجباً). وعلى العكس إذا كانــت أ < ب (أ أصغر من ب) فإن أ – ب < صفر (أى يكون الفرق مقداراً سالباً). أى أنه إذا كانت أ ، ب أعداداً حقيقية فإن:

أ > ب فقط إذا وجد عدد موجب س بحيث أن أ = ب+س

كما أن أ < ب فقط إذا وجد عدد آخر موجب ص بحيث أن أ + ص = ب

وتكـون المتباينـة مطلقـة حينمـا تتحقـق لجميـع القيـم الحقيقيـة. فمثــلاً (أ – ب)^{٢} > –٢ تعبر عن متباينة مطلقة لجميع القيم الحقيقية أ،ب لأن مربـع أى عدد حقيقى دائما أكبر من أو يساوى الصفر. وتكون المتباينــة شـرطية إذا تحققت لقيم محددة فمثلاً س– ٥> ٢ تتحقق لجميع قيم س > ٧ فقط.

وتميز العلامات > ، < متباينات تامة فى حين أن العلامات ≤ ، ≥ (أكـبر من أو تساوى، أصغر من أو تساوى) فهى تميز متباينات مختلطة.

وللمتباينـات اسـتخدامات متعددة فـي الاقتصـاد الريـاضى ونظريـة المباريات والبرمجة الخطية. وتتضـح أهميـة اسـتخدام المتباينـات حيـن نكـون بصدد إيجاد حل لمشكلة ما يشترط فيه تحقيق شروط تؤدى إلى الوصول إلـى قيم عظمى (تحقيق أقصى عائد ممكن مثلا) أو قيم دنيا (تخفيـض التكلفـة إلـى الحد الأدنى مثلا).

بعض خصائص المتباينات:

للمتباينات خصائص نوجز منها:

١- إذا كانت أ > ب، ب > جـ فإن أ > جـ. ويمكن أن ندمـج المتبـاينتين معـاً كالآتى: أ > ب > جـ.

وعموماً إذا كانت $أ_{١} \leq أ_{٢}$ ، $أ_{٢} \leq أ_{٣}$، ......، $أ_{ن-١} \leq أ_{ن}$ فـإن $أ_{١} \leq أ_{ن}$، وتكون $أ_{١} = أ_{ن}$ فقط عندما $أ_{١} = أ_{٢} = \ldots\ldots = أ_{ن}$

٢- إذا كانت أ > ب ، جـ > د فإن:

أ + جـ > ب + د

إذا كانت أ > ب ، جـ عدداً حقيقياً فإن:

أ + جـ > ب + جـ

وعموماً إذا كانت:

$أ_{١} \leq ب_{١}$ ، $أ_{٢} \leq ب_{٢}$ ...، $أ_{ن} \leq ب_{ن}$ فإن:

$أ_{١} + أ_{٢} + \ldots + أ_{ن} \leq ب_{١} + ب_{٢} + \ldots + ب_{ن}$

ويتحقق التساوى فقط عندما $أ_{ر} = ب_{ر}$

ر = ١ ، ٢، ...، ن.

٣- إذا كانت أ > ب ، جـ > صفر فإن

أ جـ > ب جـ

أما إذا كانت أ > ب ، جـ < صفر فإن:

أ جـ < ب جـ

وعموماً إذا كانت أ ≤ ب ، جـ > صفر فإن أ جـ ≤ ب جـ ويتحقق التساوى فقط عندما أ = ب.

وكذلك إذا كانت: أ ≤ ب ، جـ < صفر فإن أ جـ ≥ ب جـ ويتحقق التساوى فقط عندما أ = ب.

وهذا يعنى أن ضرب طرفى المتباينة فى مقدار موجب لايترتب عليه تغيير اتجاه علامة المتباينة ولكن الضرب فى مقدار سالب يترتب عليه عكس اتجاه المتباينة.

٤- إذا كانت أ > ب > صفر، جـ > د > صفر فإن أ جـ > ب د. والشرط الرئيسى هنا هو أن كلا من ب ، د > الصفر.

وعموماً إذا كانت $أ_{١}$ ≤ $ب_{١}$ > صفر، $أ_{٢}$ ≤ $ب_{٢}$ > صفر، ...، $أ_{ن}$ ≤ $ب_{ن}$ > صفر فإن:

$أ_{١}$ × $أ_{٢}$ × ..... × $أ_{ن}$ ≤ $ب_{١}$ × $ب_{٢}$ × ..... × $ب_{ن}$.

ويتحقق التساوى فقط عندما $أ_{١}$ = $ب_{١}$ ، $أ_{٢}$ = $ب_{٢}$، .....، $أ_{ن}$ = $ب_{ن}$

٥- إذا كانت أ > ب > صفر فان $أ^{٢}$ > $ب^{٢}$

ولكن إذا كانت ب < صفر فإنه لايمكن التوصل إلى نفس النتيجه.

٦- إذا كانت أ > ب ، جـ > د فإن:

أ - د > ب - جـ.

وكذلك إذا كانت أ > ب، جـ عدداً حقيقياً فإن

أ - جـ > ب - جـ. وعموما إذا كانت:

أ ≤ ب ، جـ ≤ د فإن أ - د ≤ ب - جـ

ويتحقق التساوى فقط عندما أ = ب، جـ = د

٧- إذا كانت أ > ب > صفر ، جـ > د > صفر فإن:

$\frac{\text{أ}}{\text{د}} > \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ وكحالة خاصه إذا كانت أ = ب =١

، جـ > د > صفر فإن $\frac{\text{أ}}{\text{د}} > \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

وعموماً إذا كانت: أ ≤ ب > صفر، جـ ≤ د > صفر

فإن $\frac{\text{أ}}{\text{د}} \leq \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ويتحقق التساوى فقط عندما أ = ب، جـ = د.

٨- إذا كانت أ > ب > صفر وكانت م ، ن أعداداً صحيحة فإن:

$\text{أ}^{\frac{1}{\text{ن}}}$ ، $\text{ب}^{\frac{1}{\text{ن}}}$ تعبر عن الجذور النونية الموجبة، ويكون $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} > \text{ب}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ،

$\text{ب}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}} > \text{أ}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$. وعموماً إذا كانت أ ≤ ب > صفر وكانت م مقداراً غير

سالب، ن مقدار موجب فإن $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} \leq \text{ب}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، $\text{ب}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} \leq \text{أ}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ويتحقق التساوى فقط

عندما أ = ب ، م = صفر.

وفيما يلي بعض الأمثلة على المتباينات:

مـثـال(١)

أثبت أن $أ^٢ + ب^٢ \geq ٢$ أ ب لجميع قيم أ ب الحقيقية.

الحل:

نعلم أنه إذا كانت أ$\neq$ الصفر ، ب$\neq$ الصفر فإن $أ^٢ >$صفر ، $ب^٢ >$ صفر

$\because$ $(أ - ب)^٢ \geq$ صفر $\therefore$ $أ^٢ - ٢أب + ب^٢ \geq$ صفر

$\therefore$ $أ^٢ + ب^٢ \geq ٢أ ب \geq$ صفر

$\therefore$ $أ^٢ + ب^٢ \geq ٢أ ب$

مـثـال(٢)

أثبت أن $\frac{س + ص}{٢} \geq \sqrt{س ص}$ لجميع قيم س، ص الموجبة

الحل:

$\because$ $أ^٢ + ب^٢ \geq ٢$ أ ب

$\therefore$ $\frac{أ^٢ + ب^٢}{٢} \geq$ أ ب

وبفرض أن $أ^٢ =$ س ، $ب^٢ =$ ص

فيمكن كتابة المتباينة الأخيرة على النحو التالى:

$$\frac{س + ص}{٢} \geq \sqrt{س ص}$$

المتباينات الخطية فى مجهول واحد:

تعرف المتباينات التى على الصورة:

أ س + ب ≤ جـ   أ > صفر

أ س + ب ≥ جـ   أ > صفر

بأنها متباينات خطية فى مجهول واحد

قيم س التى تحقق المتباينة أ س + ب ≤ جـ

$$\text{س} \leq \frac{\text{جـ} - \text{ب}}{\text{أ}}$$

كما أن حل المتباينة: أ س + ب ≥ جـ هى:

$$\text{س} \geq \frac{\text{جـ} - \text{ب}}{\text{أ}}$$

من الواضح أن حلول المتباينات تتشابه مع حلول المعادلات وإن كان الاختلاف الرئيسى للمتباينات عن المعادلات هو أن نطاق أو مجال مجموعة الحلول لها قد يقع فى فترة أو أكثر .

مثال(٣)

أوجد قيم س التى تحقق المتباينات التالية:

أ- ٤س + ٥ > ٢س + ٩

ب- $\frac{\text{س}}{٢} - \frac{-١}{٣} > \frac{٢\text{س}}{٣} + \frac{١}{٢}$

جـ- ٤س + ٣ ≤ ٥

الحل:

أ- ٤س + ٥ > ٢س + ٩

∴ ٤س − ٢س > ٩ −٥

٢س > ٤ أو س > ٢

أى أن جميع قيم س أكبر من ٢ تحقق هذه المتباينة.

ب- $\frac{\text{س}}{٢} - \frac{-١}{٣} > \frac{٢\text{س}}{٣} + \frac{١}{٢}$

يمكن وضع المتباينة فى الصورة

$$\frac{٣\ \text{س}}{٦} - \frac{٢}{٦} > \frac{٤\text{س}}{٦} + \frac{٣}{٦}$$

أو $\frac{٣\text{س} - ٤\text{س}}{٦} > \frac{٣ + ٢}{٦}$ أو $\frac{-\ \text{س}}{٦} > \frac{٥}{٦}$

أى أن − س > ٥ أو س > −٥

جـ- ٤ س + ٣ ≤ ٥ ينتج

٤ س ≤ ٥−٣ أو ٤ س ≤ ٢

∴ س ≤ $\frac{١}{٢}$

أى أن جميع قيم س التى تساوى أو تزيد عن $\frac{١}{٢}$ تحقق هذه المتباينة.

متباينات الدرجة الثانية ذو مجهول واحد:

تعرف المتباينات أ س^{2} + ب س + جـ < صفر، أ س^{2}+ ب س+ جـ > صفر أ > صفر بأنها متباينات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

وإذا كان للمعادلة أ س^{2} + ب س + جـ = صفر جذوراً حقيقية س$_{1}$، س$_{2}$ مثلا و بفرض أن أ > صفر فإنه يمكن كتابة المتباينة

أ س^{2} + ب س + جـ < صفر ، أ > صفر كالآتى:

(س − س$_{1}$) (س − س$_{2}$) < صفر

ويكون لهذه المتباينة حل إذا كان س − س$_{1}$ < صفر، س − س$_{2}$ > صفر أو العكس وسيتحقق ذلك عندما تكون س$_{1}$ < س$_{2}$.

وبالنسبة للمتباينة الثانية أ س^{2} + ب س + جـ > صفر، أ > صفر فيمكن كتابتها كالآتى: (س − س$_{1}$) (س −س$_{2}$) > صفر ولكى تتحقق هذه المتباينة فلابد وأن يكون العاملين (س − س$_{1}$)، (س − س$_{2}$) موجبى القيمة معا أو سالبى القيمة معا.

أما إذا كانت أ < صفر فإنه يمكن ضرب المتباينة فى −١ وتغير اتجاه علاقة المتباينة إلى الإتجاه المعاكس واستكمال الحل بنفس الطريقة السابقة.

مثال(٤)

أوجد قيم س التى تحقق:

أ) س^{2} − س − ٦ = صفر

ب) $س^{٢}$ − س − ٦ < صفر

جـ) $س^{٢}$ − س − ٦ > صفر

الحل:

أ) $س^{٢}$ − س − ٦ = صفر

(س − ٣) (س + ٢) = صفر

∴ س − ٣ = صفر أى س = ٣

أو س + ٢ = صفر

∴ س = −٢.

ب) $س^{٢}$ − س − ٦ < صفر

(س − ٣) (س + ٢) < صفر

أما أن س − ٣ < صفر، س − ٢ > صفر

أى أن س < ٣ ، س > −٢ فى نفس الوقت وهو ممكن.

أو أن س − ٣ > صفر، س + ٢ < صفر فى نفس الوقت أى أن س> ٣ وهى فى نفس الوقت < −٢ وهو غير ممكن لذلك فإن حل المتباينة:

$س^{٢}$ − س − ٦ < صفر هى مجموعة قيم س حيث −٢ < س < ٣.

جـ) $س^{٢}$ − س − ٦ > صفر

(س − ٣) (س + ٢) > صفر

أما أن س < ٣ ، س < −٢ وهو ممكن خلال الفترة س < −٢

أو أن س − ٣ > صفر، س + ٢ > صفر

أى أن س > ٣ ، س > -٢ وهو ممكن أيضاً خلال الفترة من س>٣

ويكون حل المتباينة:

س^{٢}- س- ٦ > صفر هو مجموعة قيم س خلال الفترتين س< -٢، س > ٣.

القيم المطلقة والمتباينات المتضمنة قيماً مطلقة:

تعريف: تعرف القيمة المطلقة لعدد حقيقى أ بأنها القيمة العددية الموجبة للعدد بغض النظر عن الإشارة.

فمثلاً |٢| = ٢، |صفر| = صفـر ، |-٢| = ٢ وكذلك |س| = ١ تعطى أن س = ١ أو س = -١ أما المتباينة |س| ≥ ١ فانها تشير إلـى جميع قيم س داخل الفترة [-١ ، ١] أى -١ ≥ س ≥ ١.

وسوف نتعرض بإيجاز لبعض النظريات التى تفيد فى حل المتباينـات الخطية المشتمله على قيم مطلقة.

١- المتباينة الخطية |أ س + ب| > جـ ، جـ > صفر تتحقق بأى من القيمتين:

أ س + ب > جـ أو -(أ س + ب) > جـ

٢- المتباينة |أ س + ب| < جـ ، جـ > صفر تتحقق بأى من القيمتين:

أ س + ب < جـ أو - (أ س + ب) < جـ أى:

- جـ < أ س + ب < جـ

مــثــال(٥)

أوجد قيم س التى تحقق المتباينة:

|س − ١| ≥ ٢

الحل:

| س − ١| ≥ ٢ تعنى أن

٢ ≥ س − ١ ≥ ٢ وبإضافة ١ إلى حدود المتباينة

∴ −١ ≥ س ≥ ٣ .

٣− | أ | + | ب | ≤ | أ + ب | لجميع الأعداد الحقيقية لكل من أ ، ب ويتحقق التساوى فقط إذا كان أ ب ≤ صفر أى إذا كان كل من أ ، ب ≤ صفر أو ≥ صفر.

فمثلاً أ = ٥ ، ب = −٢

| أ + ب| = | ٥ + (−٢)| = ٣

| أ | + | ب | = | ٥ | + | −٢ | = ٧

ولكن إذا كانت أ = −٥ ، ب = −٢

| أ + ب | = | −٥ −٢ | = | −٧ | = ٧

| أ | + | ب | = | −٥ | + | −٢ | = ٧

∴ | أ + ب | = | أ | + | ب |

٤- | أ - ب | ≤ | أ | - | ب | لجميـــع الاعـــداد الحقيقيـــة أ ، ب ويتحقـــق التساوى عندما تكون أ ب ≤ صفر أى أن أ ، ب كلاهمـا ≤ صفر أو ≥ صفر | أ | ≤ | ب |

فمثلاً: أ = ٥ ، ب = ٧

| ٥ -٧ | = ٢ ، | ٥ | - | ٧ | = -٢

ولكن عندما أ = ٥ ، ب = -٧

| ٥ - (-٧) | = ١٢ ويكون | ٥ | - | -٧ | = -٢

أما أ = -٥ ، ب = -٧

| -٥ - (-٧) | = ٢ ، | -٥ | - | -٧ | = -٢

وأما أ = -٧ ، ب = -٥

| -٧ - (-٥) | = ٢ ، | -٧ | - | -٥ | = ٢

٥- يطلق على المتباينات التى على أى من الصور التالية:

أ س + ب ص ≤ جـ أو أ س + ب ص ≥ جـ

بأنها متباينات خطية فى مجهولين س ، ص. ويمكن التعبير عن أى من المتباينتين:

أ س + ب ص > جـ

أ س + ب ص < جـ بيانياً

الفصل الثانى: البرمجة الخطية

تعتبر مشكلة توزيع الموارد المحدودة بين الإستخدامات المتعددة البديلة من أبرز وأهم المشاكل التى تواجه الإدارة أو متخذى القرار فى حياتنا العملية.

فمثلاً، عند إجراء العملية الإنتاجية فإن المشكلة التى تواجه المديرين هى كيفية توزيع عوامل الإنتاج المتاحة (والمحدودة) على المنتجات المقرر انتاجها بغرض تحقيق أكبر قدر من الأرباح أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن أوزيادة عدد الوحدات المنتجة أو أى مقاييس أخرى للكفاية وذلك فى ضوء مجموعة من القيود. هذه القيود قد ترجع إلى ظروف الإنتاج أو التشغيل أو المواد الخام أو التخزين أو التسويق أو النقل أو نوعية الموارد البشرية وغيرها من القيود التى يجب أن يتم تحقيق الهدف فى ضوئها.

والبرمجة الرياضية كأسلوب من أساليب بحوث العمليات تلعب دوراً كبيراً فى حل مثل تلك المشاكل. فهى طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد بطريقة تحقق الوضع الأفضل والأكثر ملائمة بالنسبة للمشكلة أو الهدف المدروس.

وأى برنامج رياضى يشمل، بصفة عامة، العناصر الآتية:

١- **المتغيرات القرارية:** وهى تلك المتغيرات التى يمكن اتخاذ قرارات بشأنها، ويفترض أن أصغر قيمة لكل متغير من هذه المتغيرات هى الصفر، ويعبر عنها فى الصورة: $س_1$، $س_2$، ...... ، $س_ن$ ، حيث ن تمثل عدد المتغيرات القرارية فى النموذج.

٢- **دالة الهدف:** وهى دالة رياضية تعتمد على المتغيرات القرارية وعادة تتضمن هذه الدالة هدف معين مطلوب تحقيقه مثل تعظيم الربح لأقصى حد ممكن أو تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن أو رفع كفاءة النظام القائم إلى أقصى درجة ممكنة. وتعتبر دالة الهدف المؤشر الوحيد لبلوغ الحل الأمثل.

٣- **القيود الهيكلية:** وهى مجموعة من العلاقات الرياضية التى تعتمد على كل من المتغيرات القرارية والعلاقات الفنية بين مكونات النظام، إذ لابد من وجود قيود ثابتة وحدود للموارد والإمكانيات، ولولا وجود هذه القيود والحدود الثابتة لما كانت هناك مشكلة. ويعبر عن هذه القيود الهيكلية فى صورة مجموعة من المعادلات أو المتباينات الرياضية تأخذ صورة = أو ≤ أو ≥ .

٤- **قيد عدم السلبية:** ويعنى هذا القيد أن جميع المتغيرات القرارية الداخلة فى دالة الهدف والقيود الهيكلية تساوى فقط الصفر أو قيمة موجبة، وهذا شرط أساسى وطبيعى فى معظم نظم الحياة الواقعية، ويعبر عن هذا القيد كالآتى:

سر ≥ صفر ، حيث ر = ١، ٢، .... ، ن

حيث ن ، كما سبق، تمثل عدد المتغيرات القرارية فى المشكلة .

والبرمجة الخطية هى أحد أنواع البرمجة الرياضية وفيها تكون:

١- دالة الهدف، د (س)، دالة خطية (أى دالة من الدرجة الأولى).

٢- القيود الهيكلية على شكل معادلات أو متباينات خطية أيضا.

وتعتبر العلاقة خطية بين ظاهرتين إذا كان تغير قيمة الظاهرة الأولى بوحدة واحدة يؤدى إلى تغير قيمة الظاهرة الثانية بمقدار (أو بنسبة) ثابت (ثابتة).

مجالات استخدام البرمجة الخطية:

اقترنت التطويرات النظرية للبرمجة الخطية بحل عدد كبير من التطبيقات العملية فى مجالات المعرفة المختلفة ولا سيما فى مجالى الإدارة والإقتصاد والوصول فيها إلى القرارات المثلى. ونعرض فيما يلى - على سبيل المثال لا الحصر - بعض التطبيقات الهامة:

١- تخطيط الإنتاج:

حيث تكون المشكلة في اختيار عدد معين من الوحدات الواجب انتاجها من بين بدائل عديدة مع الأخذ في الإعتبار طاقات الإنتاج ومستلزماته المتاحة واحتياجات كل منتج من هذه الطاقات والمستلزمات، مع تحقيق أقصى ربح ممكن أو أدنى تكاليف ممكنة.

٢- توزيع الإستثمارات:

حيث تكون المشكلة فى تحديد أنسب أنواع الإستثمار من بين البدائل المختلفة المتاحة وتوزيع الموارد المتاحة بين هذه الإستثمارات بحيث يكون العائد من عملية الإستثمار أكبر ما يمكن.

٣- النقل:

وتتركز المشكلة فى كيفية نقل المواد الخام أو المنتجات أو الأفراد من مصادر بها عروض (مثل المخازن أو المناجم أو المزارع) إلى جهات إستخدام لها طلبات (مثل المصانع أو مراكز التسويق والإستهلاك) بحيث يتم اختيار مسارات النقل التى تحقق أعلى كفاءة توزيعية تواجه كل الطلبات بأكبر أرباح (أو بأقل تكاليف نقل) ممكنة.

ويكون الهدف فى هذه الحالة هو كيفية تخصيص أو توزيع الموارد كالأفراد أو المركبات أو الأجهزة إلى جهات الإستخدام المختلفة بحيث يتحقق أكبر عائد ممكن أو أعلى كفاءة تشغيل ممكنة أو أقل فاقد ممكن.

٥- توزيع ميزانية الإعلان:

حيث يكون الهدف هو كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحدودة بين وسائل الإعلان المختلفة من صحافة ومجلات وإذاعة وتليفزيون ... الخ، بحيث تكون فعالية الإعلان مرتفعة إلى أقصى حد ويصل الإعلان إلى أكبر عدد ممكن من القراء أو المشاهدين.

(٧-٣) صياغة مشاكل البرمجة الخطية

سوف نقدم الأمثلة الآتية لكى نتبين كيفية صياغة المشكلة حتى يمكن استخدام البرمجة الخطية لحلها.

١- مشكلة الإنتاج:

تقوم شركة فيليبس بالتخطيط لإنتاج نوعين جديدين من جهازى التليفزيون والفيديو. وتواجه إدارة التخطيط مشكلة تحديد كمية الإنتاج من كل من هذين المنتجين فى ضوء البيانات الآتية:

أ- يحتاج إنتاج التليفزيون الواحد إلى ٣ ساعات عمل فنى، ٩ وحدات من المواد الخام، أما انتاج الفيديو الواحد فيحتاج إلى ٥ ساعات عمل فنى و٦ وحدات من المواد الخام.

ب- الحد الأقصى لساعات العمالة الفنية فى الشركة عبارة عن ٣٠٠ ساعة يوميا، والمواد الخام المتاحة ٧٢٠ وحدة يوميا.

جـ- عدد الوحدات الممكن توزيعها من أجهزة الفيديو لا تتجاوز ٥٠ جهاز يومياً، بينما تستطيع الشركة بيع أية كميات منتجة من التليفزيونات.

د- بيع التليفزيون الواحد يحقق ربحاً قدره ٤٠٠ جنيه، بينما الربح المتحقق للشركة من بيع جهاز الفيديو قدره ٦٠٠ جنيه.

فالمطلوب تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل من أجهزة التليفزيون والفيديو بحيث يكون الربح الكلى أكبر ما يمكن.

الحل:

لكى تصاغ هذه المشكلة في صورة نموذج خطى نلاحظ ما يلي:

١- المتغيرات القرارية الواجب تحديدها هي عدد الوحدات الواجب انتاجها من التليفزيونات ($س_1$) ومن أجهزة الفيديو ($س_2$).

٢- دالة الهدف: حيث أن انتاج الوحدة الواحدة من أجهزة التليفزيون يحقق ربحاً قدره ٤٠٠ جنيه والوحدة الواحدة من أجهزة الفيديو يحقق ربحاً قدره ٦٠٠ جنيه فيكون الربح الإجمالي المتحقق هو ٤٠٠ $س_1$ + ٦٠٠ $س_2$. ويكون الهدف هو تعظيم الدالة:

د (س) = ٤٠٠ $س_1$ + ٦٠٠ $س_2$

٣- القيود الهيكلية: بخصوص قيد العمالة الفنية: نجد أن إنتاج التليفزيون الواحد يحتاج إلى ٣ ساعات عمالة فنية، وانتاج جهاز الفيديو الواحد يحتاج إلى ٥ ساعات عمالة فنية، وحيث أن العمالة الفنية المستخدمة ينبغي ألا تتجاوز المتاح منها وهو ٣٠٠ ساعة عمل فنى، فيكون قيد العمالة الفنية هو:

٣ $س_1$ + ٥ $س_2$ $\leq$ ٣٠٠

بخصوص قيد المواد الخام، فبالمثل، نجد أن انتاج جهاز التليفزيون يتطلب استخدام ٩ وحدات من المواد الخام، وانتاج جهاز الفيديو يتطلب استخدام ٦ وحدات من المواد الخام، والمستخدم من المواد الخام ينبغى ألا يتجاوز المتاح منها وهو ٧٢٠ وحدة، فيصاغ القيد كالآتى:

٩ $س_{١}$ + ٦ $س_{٢}$ ≤ ٧٢٠

٤- حيث أنه لا يمكن توزيع أكثر من ٥٠ جهاز فيديو يوميا، لذلك فإن عدد الوحدات الواجب انتاجها من أجهزة الفيديو يجب ألا يزيد عن ٥٠ جهاز فى اليوم ويعبر عن هذا القيد فى الصورة:

$س_{٢}$ ≤ ٥٠

٥- قيد عدم السلبية: ويعنى أن المتغيرات القرارية يجب أن تكون كميات غير سالبة، ويعبر عن ذلك فى الصورة:

$س_{١}$ ≥ صفر ، $س_{٢}$ ≥ صفر

وعلى ذلك يمكن صياغة المشكلة السابقة على النحو التالى:

المطلوب ايجاد قيم $س_{ر}$ (حيث ر = ١، ٢) التى تحقق الحد الأقصى للدالة:

د (س) = ٤٠٠ $س_{١}$ + ٦٠٠ $س_{٢}$

بشرط أن

٣ $س_{١}$ + ٥ $س_{٢}$ ≤ ٣٠٠

٩ $س_{١}$ + ٦ $س_{٢}$ ≤ ٧٢٠

$س_{٢}$ ≤ ٥٠

$س_{ر}$ ≥ صفر (حيث ر = ١، ٢).

٢- مشكلة التغذية

بفرض أن وزارة التربية والتعليم بصدد تكوين وجبة غذائية لتلاميذ المرحلة الإبتدائية، على أن تتكون الوجبة من البيض والجبن والفاكهة لتحتوى على البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات، وتقتضى الضرورة الصحية أن تحتوى الوجبة على ٦٠ ملليجرام على الأقل من البروتينات، ٤٠ ملليجرام على الأكثر من الكربوهيدرات، ٥٠ ملليجرام على الأقل من الفيتامينات وتحتوى البيضة الواحدة على ٢٠ ملليجرام من البروتينات، ٨ ملليجرام من الكربوهيدرات، بينما تحتوى قطعة الجبن (٥٠ جرام) على ١٥، ١٢، ٥ ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات على الترتيب وتحتوى الوحدة الواحدة من الفاكهة على ٨، ١٤، ٣٠ ملليجرام من البروتينات والكربوهيدرات والفيتامينات على الترتيب.

فإذا علمت أن ثمن البيضة الواحدة ٣٠ قرشاً وثمن قطعة الجبن ٦٠ قرشاً وثمن الوحدة من الفاكهة فى المتوسط ٤٠ قرشاً فالمطلوب هو تحديد كميات البيض والجبن والفاكهة التى يجب أن تتضمنها الوجبة الغذائية للتلميذ بحيث تكون تكلفتها أصغر ما يمكن، وفى نفس الوقت يحصل التلميذ على القدر الكافى من العناصر الغذائية المطلوبة.

الحل:

لصياغة هذه المشكلة يمكن وضع بياناتها فى الجدول التالى:

المواد الغذائية / العناصر الغذائيه	البيض	الجبن	الفاكهة	الحدود الدنيا والعليا الواجب تحقيقها
البروتينات	٢٠	١٥	٨	٦٠ ملليجرام كحد أدنى
الكربوهيدرات	٨	١٢	١٤	٤٠ ملليجرام كحد أقصى
الفيتامينات	-	٥	٣٠	٥٠ ملليجرام كحد أدنى
ثمن شراء الوحدة	٣٠	٦٠	٤٠	

المتغيرات القرارية هى:

الكمية الواجب تضمينها من البيض فى الوجبة الواحدة = $س_{١}$

الكمية الواجب تضمينها من الجبن فى الوجبة الواحدة = $س_{٢}$

الكمية الواجب تضمينها من الفاكهة فى الوجبة الواحدة = $س_{٣}$

ويكون الهدف هو محاولة جعل تكلفة الوجبة الواحدة أصغر ما يمكن، أى إيجاد النهاية الصغرى للدالة:

$$د (س) = ٣٠ س_{١} + ٦٠ س_{٢} + ٤٠ س_{٣}$$

وذلك فى ظل مجموعة القيود الهيكلية الآتية:

القيد الخاص بالبروتينات: حيث أن الكمية الواجب توافرها فى الوجبة الواحدة من البروتينات ينبغى ألا تقل عن ٦٠ ملليجرام ، فيكون القيد كالآتى:

$$٢٠ س_{١} + ١٥ س_{٢} + ٨ س_{٣} \leq ٦٠$$

بالمثل، فإن القيد الخاص بالكربوهيدرات يأخذ الصورة:

$$٨ س_{١} + ١٢ س_{٢} + ١٤ س_{٣} \geq ٤٠$$

والقيد الخاص بالفيتامينات يأخذ الصورة:

٥ س٢ + ٣٠ س٣ ≥ ٥٠

وأخيراً، يأتى قيد عدم السلبية، ويعنى أن الكميات الواجب استخدامها من البيض والجبن والفاكهة فى الوجبة، س١ ، س٢ ، س٣ ، يجب ألا تكون سالبة ، أى أن:

س١ ≥ صفر ، س٢ ≥ صفر ، س٣ ≥ صفر

وتكون الصيغة الرياضية للمشكلة السابقة على النحو التالى:

المطلوب ايجاد قيم سر (ر = ١ ، ٢ ، ٣) التى تحقق الحد الأدنى للدالة:

د (س) = ٣٠ س١ + ٦٠ س٢ + ٤٠ س٣

بشرط أن:

٢٠ س١ + ١٥ س٢ + ٨ س٣ ≥ ٦٠

٨ س١ + ١٢ س٢ + ١٤ س٣ ≤ ٤٠

٥ س٢ + ٣٠ س٣ ≥ ٥٠

سر ≥ صفر ، (ر = ١، ٢، ٣) .

وبصفة عامة، فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يمكن التعبير عنها كالآتى:

إذا كانت سر تشير إلى الكمية الواجب تحديدها من المتغير ر

وإذا كانت حر هى ربح (أو تكلفة) الوحدة من المتغير ر

وإذا كان أور هو المعامل الفنى للمتغير ر من القيد و

وإذا كانت ن هى عدد المتغيرات القرارية، أى أن : ر = ١، ٢،...، ن

وإذا كانت م هى عدد القيود الهيكلية، أى أن: و = ١، ٢، .... ، م

وإذا كانت $ب_{و}$ هى الكمية المطلقة للقيد و

فإن المطلوب هو:

إيجاد الكميات $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، .... ، $س_{ن}$ التى تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة.

$$د\,(س) = ح_{١}\, س_{١} + ح_{٢}\, س_{٢} + \ldots\ldots + ح_{ن}\, س_{ن}$$

بشرط أن:

$$أ_{١١}\, س_{١} + أ_{٢١}\, س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{١ن}\, س_{ن} \geq (أو \leq أو =)\; ب_{١}$$

$$أ_{١٢}\, س_{١} + أ_{٢٢}\, س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{٢ن}\, س_{ن} \geq (أو \leq أو =)\; ب_{٢}$$

$$\vdots$$

$$أ_{م١}\, س_{١} + أ_{م٢}\, س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{م\,ن}\, س_{ن} \geq (أو \leq أو =)\; ب_{م}$$

$$س_{ر} \leq صفر \quad ، \quad (ر = ١، ٢، \ldots\ldots\ldots ، ن)$$

ويمكن كتابة النموذج السابق على الصورة المختصرة الآتية:

المطلوب تحديد الكميات $س_{ر}$ (ر = ١، ٢، .... ، ن) التى تحقق الحد الأقصى (أو الأدنى) للدالة:

$$د\,(س) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\; ح_{ر}\, س_{ر}$$

بشرط أن:

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{مجـ}}\; أ_{ور}\, س_{ر} \geq (أو \leq أو =)\; ب_{و} \quad ، \; (و = ١، ٢، \ldots\ldots ، م)$$

$$س_{ر} \leq صفر \quad ، \quad (ر = ١، ٢، \ldots\ldots ، ن) .$$

حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن تعرضنا فى الجزء السابق لمجالات استخدام أسلوب البرمجة الخطية وكيفية صياغة المشاكل التطبيقية فى صورة نماذج رياضية فإننا نحاول الآن حل النموذج أى تحديد ما هى القيم التى ستأخذها المتغيرات القرارية ($س_١$، $س_٢$، ..... ، $س_ن$) والتى تحقق كلا من القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية.

ويجب فى البداية أن نفرق بين نوعين من الحلول للنموذج الخطى وهما:

أ- الحل الأساسى المسموح به (أو الحل الممكن) وهو الحل الذى يحقق كافة القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية.

ب- الحل الأمثل وهو ذلك الحل الأساسى المسموح به والذى يجعل دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن.

ويوجد طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية هما:

أ- الحل البيانى

ب- الحل الرياضى والمعروف باسم طريقة السمبلكس.

أولاً: الحل البيانى لنماذج البرمجة الخطية:

يمكن ايجاد حل تقريبى لنماذج البرمجة الخطية باستخدام التمثيل البيانى للدوال، ويعاب على الطريقة البيانية أنه لا يمكن استخدامها إلا إذا كان النموذج الخطى يتضمن اثنين أو ثلاثة فقط من المتغيرات القرارية حيث يصعب تمثيل أكثر من ٣ أبعاد على رسم بيانى، فإذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة فلا يمكن استخدام الطريقة البيانية ويتحتم حينئذ الطريقة

الرياضية العامة، ولعل هذا هو السبب فى محدودية استخدام الأسلوب البيانى فى التطبيقات العملية. إلا أن الأسلوب البيانى للحل يتمتع بالسهولة والوضوح مما يساعد على التعرف على الأنواع المختلفة من الحلول لنماذج البرمجة الخطية.

وتقوم الطريقة البيانية فى حل نماذج البرمجة الخطية على أساس تمثيل القيود المختلفة على شكل خطوط مستقيمة ويتم ذلك كالآتى:

أ- تحول المتباينات إلى معادلات رياضية

ب- يتم رسم المعادلات الرياضية بخطوط مستقيمة. وينبغى ملاحظة أن الخط المستقيم يمكن تحديده تماما بمعرفة أى نقطتين تقعان عليه.

فإذا كان القيد على شكل معادلة فإن الحل الذى يستوفى هذا القيد ينبغى أن يقع على نفس الخط المستقيم تماما، أما إذا كان القيد على شكل متباينة فى الصورة ≥ فإن الحل الممكن ينبغى أن يقع تحت الخط المستقيم الممثل للقيد، وإذا كانت المتباينة على الصورة ≤ فإن الحل الممكن ينبغى أن يقع فوق الخط المستقيم الممثل للقيد.

وتكون المساحة المشتركة التى تحقق جميع المتباينات (القيود الهيكلية وقيد عدم السلبية) فى نفس الوقت هى منطقة الحلول الممكنة والتى ينبغى أن يقع داخلها أو على حدودها الحل الأمثل.

ولتحديد الحل الأمثل بعد ذلك يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة والتى تم تحديدها تحتوى على عدد لا نهائى من النقاط الممكنة، ولكن وجد أن النقاط الطرفية (أى التى تقع على حدود منطقة الحلول الممكنة) ستكون متضمنة دائماً الحل الأمثل.

وبتحديد هذه النقاط الطرفية (أو الأركان) لمنطقة الحلول الممكنة على الرسم نعوض بها فى دالة الهدف ونختار النقطة ذات القيمة الأفضل. فإذا كانت دالة الهدف تعنى تحقيق أقصى ربح نختار النقطة التى تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف. أما إذا كانت دالة الهدف تعنى تحقيق أقل تكلفة ممكنة نختار النقطة التى تحقق أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف. وهذه النقطة تمثل الحل الأمثل أو عدد الوحدات الواجب اختيارها من المتغير الأول $س_١$ ، وعدد الوحدات الواجب اختيارها من المتغير الثانى $س_٢$.

ولتبيان كيفية استخدام الطريقة البيانية لحل نماذج البرامج الخطية نقدم الأمثلة التالية:

مــثــال(١)

المطلوب ايجاد الحل البيانى للنموذج الآتى:

د (س) = ٦ $س_١$ + ١٠ $س_٢$ حد أقصى

بشرط أن:

٧ $س_١$ + ٦ $س_٢$ ≤ ٨٤

٢ $س_١$ + ٤ $س_٢$ ≤ ٤٠

$س_١$ ≤ ١٠

$س_ر$ ≥ صفر ، (ر = ١ ، ٢).

الحل:

سوف نعتبر أن الإحداثى السينى يمثل المتغير $س_١$، والإحداثى الصادى يمثل المتغير $س_٢$، وعليه، فإن جميع النقط فى الربع الأول

(الموجب) تحقق قيد عدم السلبية وهو: $س_1 \geq$ صفر، $س_2 \geq$ صفر. بعد ذلك نقوم بعملية التمثيل البياني للقيود الهيكلية، وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات، وبعد رسم المعادلة بخط مستقيم نحدد في أي جهة من هذا الخط يكون الحل ممكناً.

بالنسبة للقيد الأول: يتم تحويله إلى معادلة ليصبح:

$٧ س_1 + ٦ س_2 = ٨٤$

بفرض أن قيمة $س_1 =$ صفر فتكون قيمة $س_2 = \frac{٨٤}{٦} = ١٤$

وبفرض أن قيمة $س_2 =$ صفر فتكون قيمة $س_1 = \frac{٨٤}{٧} = ١٢$

وتكون النقطتان اللتان يمكن بهما رسم الخط المستقيم الذى يمثل هذه المعادلة هما: (صفر ، ١٤) ، (١٢ ، صفر).

القيد الثاني: يتم تحويله إلى معادلة فيصبح:

$٢ س_1 + ٤ س_2 = ٤٠$

عندما $س_1 =$ صفر فإن $س_2 = ١٠$

، عندما $س_2 =$ صفر فإن $س_1 = ٢٠$

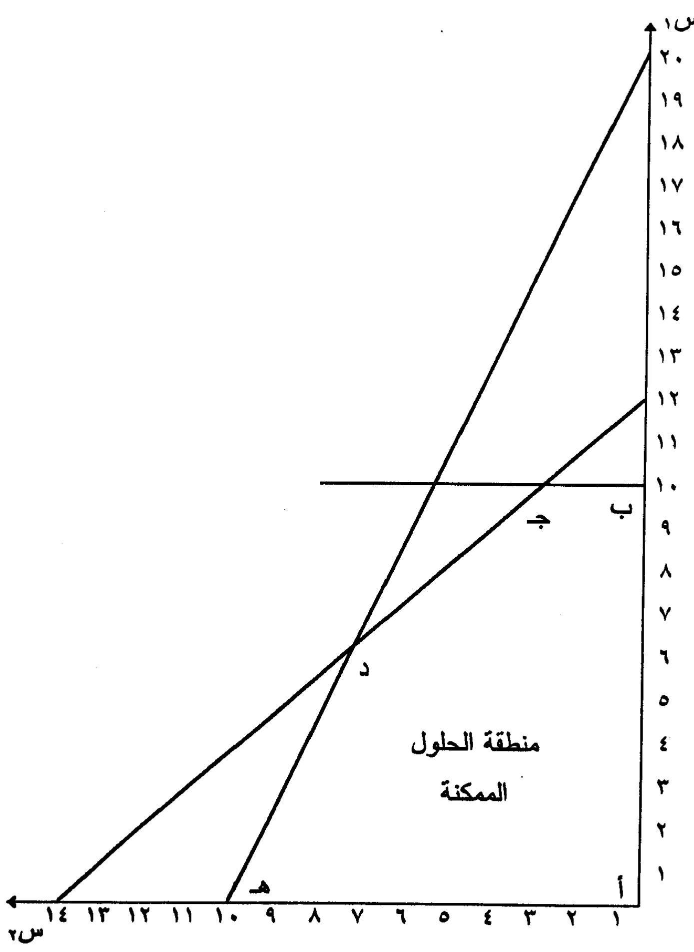
وتكون النقطتان هما: (صفر ، ١٠) ، (٢٠ ، صفر)

القيد الثالث: يتم تحويله إلى معادلة فيصبح:

$س_1 = ١٠$

يتم رسم معادلة هذا القيد بالشكل البياني بأخذ خطا عموديا موازيا للمحور الصادى عند النقطة $س_1 = ١٠$.

وبرسم المستقيمات الثلاث السابقة نحصل على الشكل البياني التالي:



وتكون منطقة الحلول الممكنة هى المنطقة أ ب جـ د هـ وهى تضم عددا لا نهائيا من الحلول التى تحقق كافة القيود وتعتبر كلها حلولا ممكنة. أما الحل الأمثل فيكون، كما سبق أن أوضحنا، هو إحدى النقاط الطرفية القصوى

أى ب أو جـ أو د أو هـ مع ملاحظة أن تستبعد النقطة أ (نقطة الأصل) فى جميع الحالات لأن هذه النقطة تعنى أن قيمة $س_١$= صفر، وقيمة $س_٢$ = صفر وقيمة دالة الهدف، د (س) = صفر أيضاً، أى أن العملية لم تبدأ بعد.

ولإيجاد النقطة التى تمثل الحل الأمثل، أى التى تجعل الدالة د (س) = ٦ $س_١$ + ١٠ $س_٢$ أكبر ما يمكن، نحسب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط الطرفية كما يتضح من الجدول الآتى:

النقطة	($س_١$، $س_٢$)	دالة الهدف د(س) = ٦ $س_١$ + ١٠ $س_٢$
ب	(١٠، صفر)	٦ (١٠) + ١٠ (صفر) = ٦٠
جـ	(١٠ ، ٢,٤)	٦ (١٠) + ١٠ (٢,٤) = ٨٤
د	(٦ ، ٧)	٦ (٦) + ١٠ (٧) = ١٠٦
هـ	(صفر، ١٠)	٦ (صفر) + ١٠ (١٠) = ١٠٠

وحيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف، فإن النقطة التى تمثل الحل الأمثل هى النقطة التى تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف د (س)، وهى النقطة د. وعند هذه النقطة نجد أن $س_١$ = ٦ ، $س_٢$ = ٧ ،كما أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة = ١٠٦ ، وهى أقصى قيمة يمكن أن تصل اليها دالة الهدف فى ظل مجموعة القيود الموضوعة.

مثال(٣)

أوجد قيم $س_١$ ، $س_٢$ التى تجعل الدالة:

د (س) = ٢$س_١$ + ٤ $س_٢$ أصغر ما يمكن

بشرط أن:

٢ س$_1$ + س$_2$ ≥ ١٢

٢ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≥ ٢٤

س$_1$ + س$_2$ ≥ ٩

س$_1$ ≥ صفر ، س$_2$ ≥ صفر .

الحل:

نحول المتباينات إلى معادلات ثم نرسم كل معادلة بخط مستقيم بعد تحديد نقطتين عليه.

القيد الأول :. ٢ س$_1$ + س$_2$ = ١٢

عندما س$_1$ = صفر فإن س$_2$ = ١٢

عندما س$_2$ = صفر فإن س$_1$ = ٦

وتكون النقطتان هما: (صفر ، ١٢) ، (٦ ، صفر)

القيد الثانى : ٢ س$_1$ + ٦ س$_2$ = ٢٤

عندما س$_1$ = صفر فإن س$_2$ = ٤

عندما س$_2$ = صفر فإن س$_1$ = ١٢

وتكون النقطتان هما : (صفر ، ٤) ، (١٢ ، صفر)

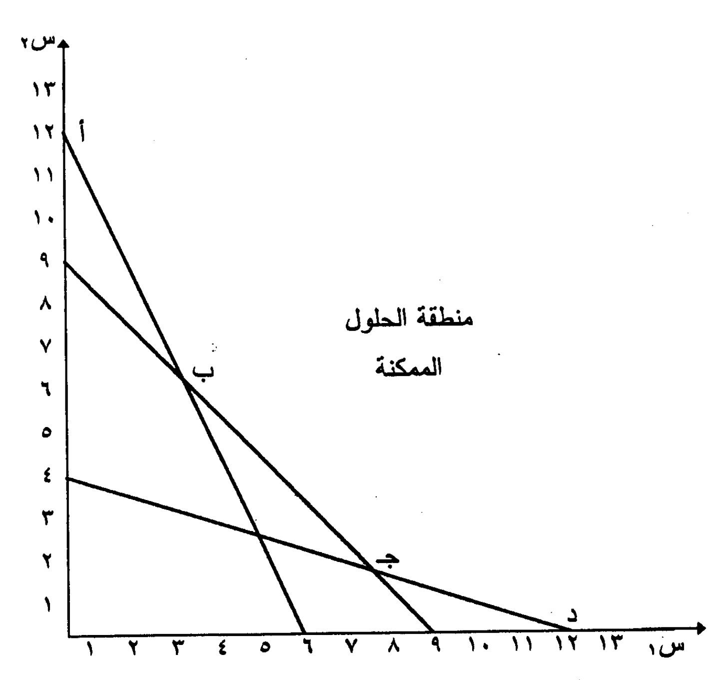
القيد الثالث : س$_1$ + س$_2$ = ٩

عندما س$_1$ = صفر فإن س$_2$ = ٩

عندما س$_2$ = صفر فإن س$_1$ = ٩

وتكون النقطتان هما : (صفر ، ٩) ، (٩ ، صفر)

ولتمثيل النموذج بيانيا نرسم المستقيمات السابقة كما هو مبين بالشكل التالى :



ويلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هى أ ب جـ د إلى أعلى وتضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة، إلا أن الحل الأمثل الذى يحقق الحد الأدنى لدالة الهدف سيكون هو إحدى النقاط الطرفية أ أو ب أو جـ أو د ، كما سبق أن أوضحنا.

ولإيجاد نقطة الحل الأمثل نعوض بكل نقطة من هذه النقاط فى دالة الهدف كما يتضح من الجدول الآتى:

النقطة	($س_1$، $س_2$)	د (س) = ٢$س_1$ + ٤ $س_2$
أ	(صفر، ١٢)	٢ (صفر) + ٤ (١٢) = ٤٨
ب	(٣ ، ٦)	٢ (٣) + ٤ (٦) = ٣٠
جـ	(٧,٥، ١,٥)	٢ (٧,٥) + ٤ (١,٥) = ٢١
د	(١٢، صفر)	٢ (١٢) + ٤ (صفر) = ٢٤

كما هو واضح فإن النقطة جـ هى التى تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف وتكون بذلك هى النقطة التى تمثل الحل الأمثل، حيث:

$س_1$ = ٧,٥ ، $س_2$ = ١,٥ كما أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة = ٢١ وهى أصغر قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف فى ظل مجموعة القيود الموضوعة.

مـثـال(٣)

أوجد قيم $س_1$ ، $س_2$ التى تجعل الدالة :

د (س) = $س_1$ + ٢ $س_2$ حد أقصى

بشرط أن:

$س_1$ + $س_2$ ≤ ٦

− ٢ $س_1$ + $س_2$ ≤ ٢

$س_1$ ≤ ٤

$س_ر$ ≥ صفر ، (ر = ١ ، ٢).

الحل:

يتم تحويل المتباينات إلى معادلات ثم نرسم كل معادلة بخط مستقيم بعد تحديد نقطتين عليه كما يلى:

القيد الأول : $س_1 + س_2 = ٦$

عندما $س_1$ = صفر فإن $س_2 = ٦$

عندما $س_2$ = صفر فإن $س_1 = ٦$

وتكون النقطتان هما : (صفر ، ٦) ، (٦ ، صفر)

القيد الثانى : $- ٢س_1 + س_2 = ٢$

عندما $س_1$ = صفر فإن $س_2 = ٢$

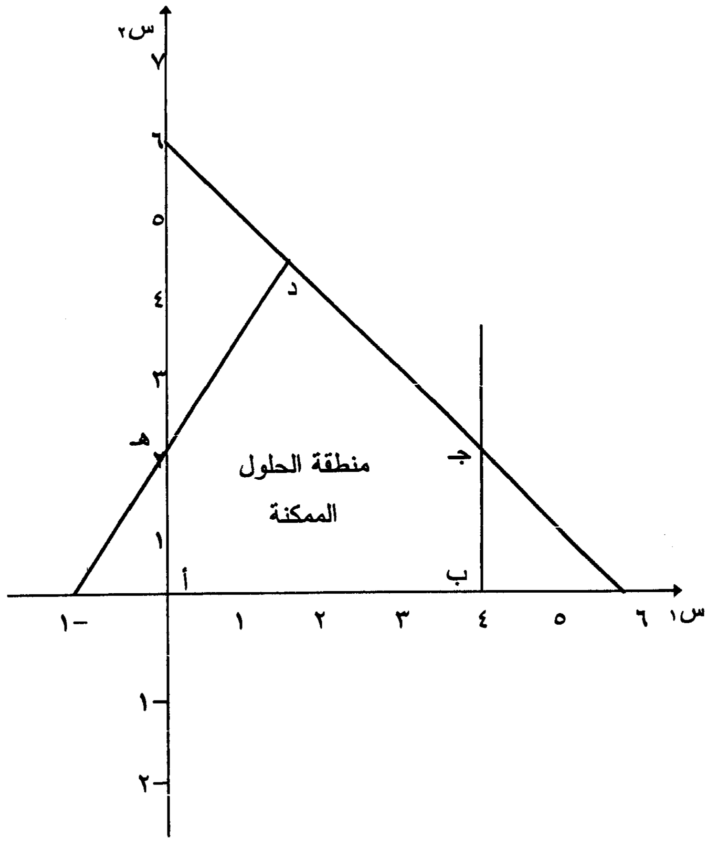
عندما $س_2$ = صفر فإن $س_1 = -١$

وتكون النقطتان هما : (صفر ، ٢) ، (-١ ، صفر)

القيد الثالث : $س_1 = ٤$

يتم رسم معادلة هذا القيد برسم خطاً مستقيماً موازياً للمحور الصادى عند النقطة $س_1 = ٤$.

وبرسم المستقيمات الثلاث السابقة نحصل على الشكل البيانى التالى:



وتكون منطقة الحلول الممكنة هى المنطقة أ ب جـ د هـ ، وهى تضم عدداً لا نهائياً من الحلول الممكنة، إلا أن الحل الأمثل الذى يحقق الحد الأقصى لدالة الهدف د (س) ، هو إحدى النقاط الطرفية ب أو جـ أو د أو هـ ، وسوف تستبعد نقطة الأصل أ ، كما سبق أن بينا.

ولإيجاد نقطة الحل الأمثل، نعوض بكل نقطة من هذه النقاط فى دالة الهدف كما يتضح من الجدول التالى:

النقطة	(س١، س٢)	د (س) = س١ + ٢ س٢
ب	(٤ ، صفر)	٤ + ٢ (صفر) = ٤
جـ	(٤ ، ٢)	٤ + ٢ (٢) = ٨
د	(١,٣، ٤,٦)	١,٣ + ٢ (٤,٦) = ١٠,٥
هـ	(صفر ، ٢)	صفر + ٢ (٢) = ٤

وكما هو واضح، فإن النقطة د هى النقطـة التـى عندهـا تتحقق أكبر قيمة لدالة الهدف، وبالتالى تكون هى نقطة الحل الأمثل. ويكون الحـل الأمثـل على النحو التالى:

س١ = ١,٣ ، س٢ = ٤,٦ ، وأكبر قيمـة لدالـة الهـدف د (س) هــى ١٠,٥ .

ثانياً: الحل الرياضى لنماذج البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس):

مما سبق يتضح لنا أن الحل البيانى لنموذج البرمجـة الخطيـة بـالرغم من أنه يتميز بسهولة تطبيقه كمـا أنـه يفيد فـى فهـم خصـائص تركيـب وحـل نموذج البرمجة الخطية، إلا أنه لا يصلح إلا فى حالة وجود متغيرين (س١ ، س٢) ويصعب اسـتخدام هـذا الأسـلوب البيـانى فـى حالـة وجـود ٣ متغـيرات قراريـة (س١، س٢، س٣)، إذ يتطلب ذلـك ثلاثـة أبعـاد علـى الرسـم البيـانى. ويستحيل استخدامه إذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة.

ومن العرض السابق للحل البيانى لنماذج البرمجة الخطية نلاحظ الحالات الآتية للحلول المختلفة للنموذج:

١- أى نموذج برمجة خطية يكون له -بوجه عام- عدد لا نهائى من الحلول المسموح بها (أى نقطة تقع داخل أو على حدود منطقة الحلول الممكنة)

٢- من بين هذا العدد اللانهائى من الحلول المسموح بها يوجد عدد محدود من الحلول الأساسية المسموح بها (حلول النقاط الطرفية).

٣- أحد الحلول الأساسية المسموح بها والذى يجعل دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن يسمى بالحل الأمثل.

لذلك وبسبب محدودية استخدام الأسلوب البيانى فى حل نماذج البرمجة الخطية فقد تمكن الباحث الرياضى **دانتزج** من تقديم طريقة السمبلكس Simplex Method باعتبارها الطريقة العامة الوحيدة التى يمكن استخدامها فى حل كافة نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات القرارية بها. وتتميز هذه الطريقة بالآتى:

١- أنها مبنية على أساس جبرى مما أدى إلى إمكانية تطبيقها فى مختلف الحالات.

٢- أنها لا تشترط حساب جميع الحلول الأساسية المسموح بها حيث أنها تبحث دائماً عن حل أفضل من الحل الذى يتم الحصول عليه حتى تصل إلى الحل الأمثل.

٣- أن هذه الطريقة تستخدم نفس القواعد للإنتقال من أى حل إلى أفضل حل. وتمثل عمليات الإنتقال هذه المراحل المتتالية اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل.

ويوجد نوعان أساسيان من نماذج البرامج الخطية على أساس طريقة الحل المستخدمة لكل منهما وهما:

النوع الأول : فى هذا النموذج تكون جميع القيود الهيكلية على الصورة ≥ وجميع قيم الثوابت، فى نفس الوقت، موجبة. وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى "طريقة السمبلكس العادية"

النوع الثانى : فى هذا النموذج تكون كل أو بعض أو أحد القيود على الصورة ≤ أو = ، وطريقة السمبلكس التى تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى "طريقة مبدول السمبلكس" . وهذه الطريقة تختلف، بالطبع، فى بعض قواعدها وخطواتها عن طريقة السمبلكس العادية، كما سنرى فيما بعد.

أولاً: طريقة السمبلكس العادية

يتم الحصول على الحل الأمثل وفقاً لطريقة السمبلكس العادية من خلال الخطوات الآتية:

١- تحويل جميع القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة متغير متمم موجب الإشارة لكل قيد.

٢- إختيار حل مبدئى أساسى مسموح به، وفى معظم الأحوال يتم إختيار نقطة الأصل كحل مبدئى، حيث تكون المتغيرات المتممة المضافة هى المتغيرات الأساسية، أى اللاصفرية، بينما تكون المتغيرات القرارية غير أساسية، أى صفرية وتكون قيمة دالة الهدف مساوية للصفر فى هذه الحالة.

٣- فى كل مرحلة من مراحل الحل تكتب دالـة الهدف وكذلـك القيـود بدلالـة المتغيرات الأساسية ثم تختبر أمثلية الحل الذى لدينـا، فـإذا كـان هـو الحـل الأمثل تنتهى العملية، وإن لم يكن كذلك ننتقل إلى حل آخر أفضل منه.

ويتم تكرار هذه الخطوة حتى نصل فى النهاية إلى الحل الأمثل.

فعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا نموذج خطى يشتمل علـى متغيرين، $س_{١}$، $س_{٢}$ وثلاثة قيود هيكلية على الصورة:

$$د(س) = ح_{١} س_{١} + ح_{٢} س_{٢} \quad \text{كحد أقصى}$$

بشرط أن:

$$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} \le ب_{١}$$

$$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} \le ب_{٢}$$

$$أ_{١٣} س_{١} + أ_{٢٣} س_{٢} \le ب_{٣}$$

$$س_{ر} \ge \text{صفر} \quad ، \quad (ر = ١ ، ٢).$$

فيتم تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات وذلك بإضافة متغير متمم لكل قيد: المتغير $س_{٣}$ للقيد الأول والمتغير $س_{٤}$ للقيـد الثـانى والمتغير $س_{٥}$ للقيـد الثالث على النحو التالى:

$$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + س_{٣} = ب_{١}$$

$$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + س_{٤} = ب_{٢}$$

$$أ_{١٣} س_{١} + أ_{٢٣} س_{٢} + س_{٥} = ب_{٣}$$

ويكون جدول الحل المبدئى لهذه المشكلة كما يلى:

المتغيرات الأساسية	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	الثوابت
س٣	أ١١	أ٢١	١	٠	٠	ب١
س٤	أ١٢	أ٢٢	٠	١	٠	ب٢
س٥	أ١٣	أ٢٣	٠	٠	١	ب٣
– د (س)	ح١	ح٢	٠	٠	٠	صفر

ويمثل هذا الحل المبدئي، الممكن فنيا وغير المرغوب فيه –دائماً– اقتصاديا، نقطة البدء فى طريقة السمبلكس.

٤– وعند الإنتقال من حل أساسي مسموح به إلى حل آخر لابد من تحويل أحد المتغيرات الغير أساسية إلى متغير أساسي ويسمى بالمتغير الداخل. وكذلك تحويل أحد المتغيرات الأساسية إلى متغير غير أساسي يسمى بالمتغير الخارج.

ويتم تحديد كلا من المتغير الداخل والمتغير الخارج وفقا لقاعدة معينة حتى نضمن الإنتقال إلى حل أفضل ومسموح به.

إختيار المتغير الداخل

يتم إختيار المتغير الداخل على أساس أنه المتغير الأكثر ايجابية فى معادلة دالة الهدف، فإذا كان المطلوب هو ايجاد الحد الأقصى لدالة الهدف فيتم اختيار هذا المتغير على أساس أكبر المعاملات الموجبة للمتغيرات غير الأساسية فى الصف – د (س) فى جدول الحل. أما إذا كان المطلوب هو إيجاد الحد الأدنى لدالة الهدف فيتم إختيار المتغير الداخل على أساس أكبر معامل سالب للمتغيرات غير الأساسية فى الصف – د (س) فى جدول الحل.

وفى حالة وجود أكثر من معامل متساوٍ، فـى أى مـن حـالتى التعظيم والتصغير، نختار أحدهما.

إختيار المتغير الخارج

يتم اختيار المتغير الخارج بحيـث يكـون الحـل الجديـد، مسـموحا بـه، ويتحقق ذلك باختيار المتغير الأساسـى الـذى تصبـح قيمتـه صفـرا قبـل غيـره عندما تـزداد قيمـة المتغير الداخـل. والقـاعدة التـى يتـم علـى أساسـها اختيـار المتغير الخارج هى:

حساب خارج قسـمة الثوابـت (عنـاصر العمـود الأخـير فـى الجـدول) على العناصر المقابلة لهـا فـى عمـود المتغير الداخـل الموجبـة الإشـارة فقط (وذلك بعد استبعاد العناصر السالبة والتى تساوى الصفـر مـن هـذا العمـود). ويتم اختيار أقل خارج قسمة ليصبح المتغير الأساسى الذى يقابلها هو المتغـير الخارج (أى الذى سوف يتحول فى المرحلة التالية إلى متغـير غـير أساسـى). وإذا لم يوجد فى عمـود المتغير الداخـل أى عنصـر موجـب الإشـارة فيكـون النموذج ليس له حل، وتطبق هذه القاعدة سواء فـى حـالات الحـد الأقصـى أو الحد الأدنى لدالة الهدف.

وعند الإنتقال من حل أساسى مسموح به إلى حل آخر أفضل منه، إذا اعتبرنـا أن عمـود المتغير الداخـل هـو العمـود المحـورى، وصـف المتغـير الخارج هو الصف المحورى، بينما نعتبر أن العنصر الموجود فى الخلية التى يتقاطع فيها العمود المحورى مع الصـف المحـورى هـو العنصـر المحـورى، فإن القواعد االتى تحكم عملية الإنتقال من مرحلة إلى أخرى فى الحل هى:

١- العمود المحورى : تصبح جميع عناصره فى الحل الجديد أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساويا للواحد الصحيح.

٢- الصف المحورى : ينقل بالجدول الجديد كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر المحورى.

٣- باقى العناصر تحسب وفقاً للقاعدة الآتية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر الأصلى} - \frac{\text{العنصر المقابل فى العمود المحورى} \times \text{العنصر المقابل فى الصف المحورى}}{\text{العنصر المحورى}}$$

فإذا فرضنا فى إحدى مراحل الحل الأساسى الممكن أن العنصر الأصلى هو س وأن العنصر المقابل له فى العمود المحورى هو ص والعنصر المقابل له فى الصف المحورى هو ع وأن العنصر المحورى (الناتج من تلاقى الصف المحورى مع العمود المحورى) هو ل ، كما يتضح من الشكل التالى:

العمود المحورى

س ص

ع ل

الصف المحورى

العنصر المحورى

فإن العنصر الجديد – فى المرحلة التالية من مراحل الحل – للعنصر الأد ـلى س والذى نرمز له بالرمز س/ يحسب كما يلي:

$$س^{/} = س - \frac{ص \times ع}{ل}$$

اختبار الأمثلية

في كل مرحلة من مراحل الحل ابتداء من مرحلة الحل المبدئى نجرى اختبار الأمثلية للتأكد من أن الحل المتاح هو الحل الأمثل أم أنه حل أساسى مسموح به ويمكن تحسينه فى مرحلة أخرى لاحقة على النحو التالى:

إذا كان المطلوب هو ايجاد الحد الأقصى لدالة الهدف:

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف فى الصف الأخير جميعها سالبه بالنسبة للمتغيرات الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الغير أساسية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، أما فى حالة وجود معاملات موجبة الإشارة للمتغيرات الغير أساسية فى صف دالة الهدف فإن ذلك يعنى أن الحل الحالى ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه.

إذا كان المطلوب هو ايجاد الحد الأدنى لدالة الهدف:

إذا كانت إشارات معاملات دالة الهدف فى الصف الأخير من الجدول جميعها موجبة بالنسبة للمتغيرات الأساسية وأصفار بالنسبة للمتغيرات الغير أساسيه نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المنشود. بينما وجود معاملات سالبة الإشارة للمتغيرات غير الأساسية فى صف دالة الهدف يعنى أن الحل الجارى ليس هو الحل الأمثل ولابد من الإنتقال لمرحلة تالية لتحسينه.

مـثـال(٤)

استخدم طريقة السمبلكس لإيجاد قيم $س_١$ ، $س_٢$ التى تحقق الحد الأقصى للدالة:

$$د (س) = ٤٠ س_١ + ٥٠ س_٢$$

بشرط أن:

$$س_١ + ٢ س_٢ \leq ١٢$$

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \leq ٣٠$$

$$٣ س_١ + س_٢ \leq ١٥$$

$$س_١ \geq صفر ، س_٢ \geq صفر .$$

الحل:

نقوم أولا بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات متممة موجبة وهى : $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ بواقع متغير متمم لكل قيد كالآتى:

$$س_١ + ٢ س_٢ + س_٣ = ١٢$$

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ + س_٤ = ٣٠$$

$$٣ س_١ + س_٢ + س_٥ = ١٥$$

ويكون الجدول الذى يمثل الحل المبدئى (أى المرحلة الأولى) هو:

المتغيرات الأساسية	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	$س_٥$	الثوابت	
$س_٣$	١	٢	١	٠	٠	١٢	٦
$س_٤$	٥	٤	٠	١	٠	٣٠	٧,٥
$س_٥$	٣	١	٠	٠	١	١٥	١٥
− د (س)	٤٠	٥٠	٠	٠	٠	صفر	

في هذا الحل المبدئى نجد أن:

المتغيرات الأساسية هى المتممات المضافة وهى: $س_٣$ = ١٢، $س_٤$ = ٣٠ ، $س_٥$ = ١٥.

المتغيرات الغير أساسية هى: $س_١$ = صفر ، $س_٢$ = صفر

قيمة دالة الهدف هى : د (س) = صفر

اختبار الأمثلية

حيث أن معاملى المتغيرين الغير أساسيين فى صف دالة الهدف ، – د (س) ، هما: ٤٠، ٥٠ وكلاهما قيمة موجبة، فيكون الحل المبدئى ليس هو الحل الأمثل وهناك إمكانية لتحسينه، وبما أن المعامل ٥٠ فى صف دالة الهدف هو أكبر معامل موجب، فيكون $س_٢$ هو المتغير الداخل ويكون عمود $س_٢$ بالتالى هو العمود المحورى.

ولتحديد الصف المحورى نقوم بقسمة عناصر عمود الثوابت (أى العمود الأخير فى الجدول) على العناصر المقابلة لها فى العمود المحورى والموجبة فقط فنحصل على:

$$\frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ ، } \frac{٣٠}{٤} = ٧,٥ \text{ ، } \frac{١٥}{١} = ١٥$$

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة ٦ والتى تقابل $س_٣$ فيكون $س_٣$ هو المتغير الخارج وبالتالى فإن صف $س_٣$ يكون هو الصف المحورى، ونتيجة لتلاقى الصف المحورى (صف $س_٣$) مع العمود المحورى (عمود $س_٢$) ينشأ العنصر المحورى وهو القيمة ٢ .

المرحلة الثانية

ثم ننتقل بعد ذلك إلى إحلال المتغير الداخل س$_{٢}$ محل المتغير الخارج س$_{٣}$ مع تطبيق القواعد التحويلية التى سبق الإشارة إليها فنحصل على الجدول الآتى:

المتغيرات الأساسية	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	الثوابت	
س$_{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{١}{٣}$	٠	٠	٦	١٢
س$_{٤}$	٣	٠	٢-	١	٠	٦	٢
س$_{٥}$	$\frac{٥}{٢}$	٠	$-\frac{١}{٣}$	٠	١	٩	٣,٦
– د (س)	١٥	٠	– ٢٥	٠	٠	– ٣٠٠	

هذا الجدول يعطى الحل الأساسى المسموح به التالى:

المتغيرات الأساسية هى:

س$_{٢}$ = ٦ ، س$_{٤}$ = ٦ ، س$_{٥}$ = ٩

المتغيرات الغير أساسية هى:

س$_{١}$ = س$_{٣}$ = صفر

قيمة دالة الهدف = د (س) = ٣٠٠

حيث أمكن تحقيق بعض الربح لأن المتغير س$_{٢}$ أصبح متغيراً أساسياً.

إختبار الأمثلية

بتطبيق إختبار الأمثلية على الجدول الثانى نجد أن هذا الحل الأساسى المسموح به ليس هو الحل الأمثل وذلك لوجود معامل موجب الإشارة فى

صف دالة الهدف لأحد المتغيرات الغير أساسية وهو $س_1$ ، أى أن هذا الحل يقبل التحسين.

- وبما أن المتغير $س_1$ هو المتغير الوحيد الذى له معامل موجب فى صف دالة الهدف، لذا يتعين اختياره كمتغير داخل ويكون عمود $س_1$ بالتالى هو العمود المحورى.
- لتحديد الصف المحورى، فكما سبق أن بينا، نقسم عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحورى الموجبة المناظرة لها فنحصل على :

$$٦ \div \frac{١}{٢} = ١٢ \quad ، \quad ٦ \div ٣ = ٢ \quad ، \quad ٩ \div \frac{٥}{٢} = ٣,٦$$

وأقل خارج قسمة هو القيمة ٢ ويناظر صف $س_4$، وعليه، فيكون المتغير $س_4$ هو المتغير الخارج ويكون صف $س_4$ هو الصف المحورى، والعنصر المحورى فى هذه المرحلة هو القيمة ٣ .

المرحلة الثالثة

ننتقل بعد ذلك إلى إحلال المتغير $س_1$ محل المتغير الخارج $س_4$ مع تطبيق نفس القواعد التحويلية لنحصل على الجدول التالى:

المتغيرات الأساسية	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	الثوابت
$س_2$	٠	١	$\frac{٥}{٦}$	$-\frac{١}{٦}$	٠	٥
$س_1$	١	٠	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	٠	٢
$س_5$	٠	٠	$\frac{٧}{٦}$	$-\frac{٥}{٦}$	١	٤
$-$ د (س)	٠	٠	-١٥	-٥	٠	-٣٣٠

من الجدول السابق ينتج أن:

المتغيرات الأساسية هي:

$س_٢ = ٥$ ، $س_١ = ٢$ ، $س_٥ = ٤$

المتغيرات الغير أساسية هي:

$س_٣ = س_٤ =$ صفر

قيمة دالة الهدف = د (س) = ٣٣٠ .

إختبار الأمثلية

بتطبيق إختبار الأمثلية على الجدول الثالث نجد أنه لا يوجد معاملات موجبة فى صف دالة الهدف، أى أن معاملات المتغيرات الغير أساسية كلها أصبحت سالبة وبذلك يكون الحل الجارى هو الحل الأمثل وهو: $س_١ = ٢$، $س_٢ = ٥$

وتكون أكبر قيمة لدالة الهدف هى: د (س) = ٣٣٠

مثال(٥)

استخدم طريقة السمبلكس فى إيجاد الحل الأمثل للنموذج الخطى التالى:

د (س) = − ٢٧ $س_١$ − $س_٢$ − ٢ $س_٣$ حد أدنى

بشرط أن:

١٢ $س_١$ + $س_٢$ + $س_٣$ ≥ ٧

٣٠ $س_١$ + $س_٢$ − ٤ $س_٣$ ≥ ١٠

٣ $س_١$ + ٢ $س_٢$ ≥ صفر

$س_ر$ ≤ صفر ، (ر = ١، ٢، ٣) .

الحل:

نحول المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير متمم موجب لكل قيد:

12 س$_1$ + س$_2$ + س$_3$ + س$_4$ = 7

30 س$_1$ + س$_2$ − 4 س$_3$ + س$_5$ = 10

3 س$_1$ + 2 س$_2$ + س$_6$ = صفر

ويكون جدول الحل المبدئي والذى يمثل المرحلة الأولى من الحل هو:

المتغيرات الأساسية	س$_1$	س$_2$	س$_3$	س$_4$	س$_5$	س$_6$	الثوابت
س$_4$	١٢	١	١	١	٠	٠	٧
س$_5$	٣٠	١	−٤	٠	١	٠	١٠
س$_6$	٣	٢	٠	٠	٠	١	٠
− د (س)	−٢٧	−١	−٢	٠	٠	٠	٠

حيث أن المطلوب هو جعل دالة الهدف د (س) حد أدنى وحيث أن معاملات المتغيرات غير الأساسية فى الصف − د (س) بالجدول السابق كلها سالبة الإشارة فيكون الحل المبدئى الحالى ليس هو الحل الأمثل.

وحيث أن المعامل − ٢٧ فى الصف − د (س) هو أكبر معامل سالب فيكون المتغير س$_1$ هو المتغير الداخل ويكون عموده هو العمود المحورى.

لتحديد المتغير الخارج، نقسم عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها فى العمود المحورى والموجبة فقط فنحصل على :

$\frac{٧}{١٢}$ = ٠,٥٨ ، $\frac{١٠}{٣٠}$ = ٠,٣٣ ، $\frac{صفر}{٣}$ = صفر

وحيث أن أصغر خارج قسمة هو القيمة صفر والتى تقابل المتغير س$_{٦}$، فيكون المتغير س$_{٦}$ هو المتغير الخارج ويكون صفه هو الصف المحورى. ونتيجة لتلاقى الصف المحورى مع العمود المحورى ينشأ العنصر المحورى وهو القيمة ٣.

المرحلة الثانية

بإحلال المتغير الداخل س$_{١}$ محل المتغير الخارج س$_{٦}$ ، وبتطبيق القواعد التحويلية السابقة نحصل على جدول الحل التالى:

المتغيرات الأساسية	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	س$_{٦}$	الثوابت
س$_{٤}$	٠	-٧	١	١	٠	-٤	٧
س$_{٥}$	٠	-١٩	-٤	٠	١	-١٠	١٠
س$_{١}$	١	$\frac{٢}{٣}$	٠	٠	٠	$\frac{١}{٣}$	٠
- د (س)	٠	١٧	-٢	٠	٠	٩	٠

ووفقا لهذا الجدول فإن الحل الأساسى المسموح به هو:

المتغيرات الأساسية هى: س$_{٤}$ = ٧ ، س$_{٥}$ = ١٠ ، س$_{١}$ = صفر

المتغيرات غير الأساسية هى: س$_{٢}$ = س$_{٣}$ = س$_{٦}$ = صفر

قيمة دالة الهدف = د (س) = صفر .

وبتطبيق إختبار الأمثلية على هذا الحل نجد أنه ليس هو الحل الأمثل نظراً لوجود معاملات سالبة فى الصف - د (س).

وحيث أن المعامل -٢ هو المعامل السالب الوحيد فى الصف -د(س) فيكون المتغير س$_{٣}$ هو المتغير الداخل ويكون عموده هو العمود المحورى،

وبقسمة عناصر عمود الثوابت على العناصر المناظرة لها فى العمود المحورى الموجبة فقط (حيث لا نقسم على العناصر السالبة الإشارة أو العناصر ذات القيمة صفر) ، فينشأ لدينا خارج القسمة الوحيد $\frac{٧}{١}$ = ٧ ، فيكون المتغير الخارج هو المتغير س$_٤$، ويكون الصف الأول من الجدول هو الصف المحورى، ويكون بالتالى العنصر المحورى هو القيمة ١.

المرحلة الثالثة

بإحلال المتغير الداخل س$_٣$ محل المتغير الخارج س$_٤$، وتطبيق القواعد التحويلية السابقة نحصل على جدول الحل التالى:

المتغيرات الأساسية	س$_١$	س$_٢$	س$_٣$	س$_٤$	س$_٥$	س$_٦$	الثوابت
س$_٣$	٠	-٧	١	١	٠	-٤	٧
س$_٥$	٠	-٤٧	٠	٤	١	-٢٦	٣٨
س$_١$	١	$\frac{٢}{٣}$	٠	٠	٠	$\frac{١}{٣}$	٠
- د (س)	٠	٣	٠	٢	٠	١	١٤

بتطبيق إختبار الأمثلية على الجدول السابق نجد أن معاملات المتغيرات غير الأساسية وهى س$_٢$ ، س$_٤$ ، س$_٦$ فى الصف - د (س) أصبحت كلها قيماً موجبة الإشارة وأصفار فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل وهو على النحو التالى:

س$_١$ = صفر ، س$_٣$ = ٧ ، س$_٥$ = ٣٨

وأصغر قيمة لدالة الهدف = - ١٤ .

ثانياً: طريقة مبدول السمبلكس ومشاكل تخفيض التكاليف

رأينا فى المثال السابق كيفية امكان تطبيق طريقة السمبلكس العادية لحل مشاكل تعظيم الأرباح حيث تكون القيود الهيكلية المرتبطة بها فى الغالب فى صورة ≥ . ويمكن استخدام طريقة السمبلكس أيضاً فى حل مشاكل تخفيض التكاليف بنفس الطريقة حيث تركز القيود الهيكلية المرتبطة بها فى الغالب على مستويات الجودة والمواصفات المطلوبة وبالتالى تكون فى صورة ≤.

وكما رأينا سابقا، عندما كانت جميع القيود الهيكلية فى الصورة ≥ وكانت جميع القيم المطلقة موجبة، تم ادخال متممات موجبة لتحويل المتباينات إلى معادلات وكانت نقطة الأصل هى الحل المبدئى (على أساس أنها أحد الحلول الأساسية المسموح بها). ولكن عندما تكون كل أو بعض أو أحد القيود الهيكلية فى الصورة ≤ أو = فإن نقطة الأصل قد لا تمثل حلا أساسيا، كما أنها قد لا تكون حلا مسموحا به إذ أن المتغيرات المتممة التى يتم ادخالها تكون سالبة الإشارة.

ويعالج هذا الوضع بإضافة متغيرات صناعية موجبة الإشارة بخلاف المتغيرات المتممة السالبة، وتسمى طريقة الحل المستخدمة فى هذه الحالة "طريقة السمبلكس على مرحلتين" ففى المرحلة الأولى يتم التخلص من المتغيرات الصناعية أى تخفيض قيمتها إلى الصفر، فإذا تم ذلك تبدأ المرحلة الثانية وفيها يتم تحسين الحل الأساسى المسموح به إلى أن نصل إلى الحل الأمثل. أما إذا كانت هذه المتغيرات الصناعية لا تصل جميعها إلى الصفر فى المرحلة الأولى فيعتبر ذلك دليلاً على عدم وجود حل أساسى مسموح به للنموذج الأصلى.

ويعاب على طريقة السمبلكس على مرحلتين أنها مرهقة حسابيا ويصاحبها تعقيدات مرتبطة بالمتغيرات الصناعية خصوصا إذا اشتمل النموذج الأصلى على عدد كبير من المتغيرات القرارية والقيود الهيكلية. لهذا سوف يكتفى المؤلف هنا بتقديم طريقة بديلة، تعالج نفس المواقف التى تعالجها طريقة السمبلكس على مرحلتين، حيث يشتمل النموذج الأصلى على قيود هيكلية فى صورة ≤ أو = ، ولكن بسهولة حسابية أكثر وفى وقت أقل . وتسمى هذه الطريقة "بطريقة مبدول السمبلكس".

وفى طريقة مبدول السمبلكس يتم تحويل القيود الموجودة على صورة ≤ إلى الصورة ≥ وذلك بضرب طرفى المتباينة فى -١، أما القيود الموجودة على شكل ≥ فتترك كما هى. فى حين القيود الموجودة على الصورة = ، فيستبدل كل قيد منها بقيدين: أحدهما على الصورة ≥ ويترك كما هو، والآخر على الصورة ≤ ثم يضرب طرفيه فى (-١) ليتحول إلى الصورة ≥ . ويلاحظ أن عدد القيود الهيكلية للنموذج فى هذه الحالة تزداد بواقع قيد مقابل كل قيد هيكلى على الصورة = . ثم يضاف لكل قيد متغير متمم موجب الإشارة لتحويل المتباينة إلى معادلة، تماما مثل ما يحدث فى طريقة السمبلكس العادية، وبالتالى تتميز هذه الطريقة بأنها تستغنى كلية عن المتغيرات الصناعية. وتبدأ هذه الطريقة بحلول أساسية غير مسموح بها ثم تتجه إلى الإمكانية ومنها إلى الأمثلية.

ويوجد عدة اختلافات بين طريقة مبدول السمبلكس وطريقة السمبلكس العادية فيما يتعلق بقواعد إختبار الأمثلية وإختيار المتغير الخارج وإختيار المتغير الداخل عند الإنتقال من مرحلة إلى مرحلة أخرى فى الحل.

ففى طريقة مبدول السمبلكس يتبع الآتى:

١- إختيار المتغير الخارج

تبدأ هذه الطريقة بتحديد المتغير الخارج على أساس أنه المتغير الأساسى الذى يقابل أكبر قيمة سالبة فى ثوابت القيود، ويكون صف ذلك المتغير هو الصف المحورى، ويستوى فى ذلك الحد الأقصى والحد الأدنى لدالة الهدف. (بينما يبدأ الحل فى طريقة السمبلكس العادية - كما رأينا - بتحديد المتغير الداخل أى المتغير الغير أساسى والمطلوب تحويله فى المرحلة التالية إلى متغير أساسى).

٢- إختيار المتغير الداخل

ثم يلى ذلك تحديد المتغير الداخل أى المتغير الغير أساسى والذى سوف يصبح أساسيا فى المرحلة التالية من مراحل الحل وذلك بقسمة معاملات صف دالة الهدف على المعاملات المناظرة لها بالصف المحورى الذى سبق تحديده، السالبة فقط (وبالتالى نتجاهل القيم الموجبة والصفرية لمعاملات الصف المحورى) ، ونختار المتغير الذى يقابل أقل خارج قسمة - بغض النظر عن إشارات خارج القسمة - فيكون هو المتغير الداخل فى المرحلة التالية ويكون بالتالى عمود ذلك المتغير هو العمود المحورى.

٣- إختبار الأمثلية

إذا اصبحت المتغيرات الأساسية كلها ذات قيم موجبة الإشارة فى العمود الأخير من الجدول وهو عمود الثوابت نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كان بعض أو أحد المتغيرات الأساسية لها قيماً سالبة فى عمود الثوابت، فإن الحل فى هذه الحالة يكون غير أمثل وتستمر بالتالى مراحل

الحل على أساس إختيار المتغير الذى له أكبر معامل سالب على أنه هو المتغير الخارج إلى أن تصبح جميع معاملات المتغيرات الأساسية فى عمود الثوابت موجبة فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل.

وفى حالة ما إذا كانت كل معاملات الصف المحورى غير سالبة، مع وجود بعض القيم السالبة فى عمود الثوابت، فإن المشكلة الأصلية لن يكون لها حلاً أساسياً مسموحاً به.

أما باقى القواعد التحويلية والتى سبق تقديمها عند عرضنا لطريقة السمبلكس العادية فتظل كما هى وذلك من حيث:

١- العمود المحورى: تصبح جميع عناصره – فى الحل الجديد – أصفار فيما عدا العنصر المحورى يصبح مساويا للواحد الصحيح.

٢- الصف المحورى: ينقل بالجدول الجديد كما هو بعد قسمة كل عنصر من عناصره علىالعنصر المحورى.

٣- باقى العناصر تحسب وفقا للعلاقة التالية:

العنصر الجديد = العنصر الأصلى –

$$\frac{\text{العنصر المقابل فى العمود المحورى} \times \text{العنصر المقابل فى الصف المحورى}}{\text{العنصر المحورى}}$$

مثال(٦)

أوجد قيم $س_١$ ، $س_٢$ التى تحقق الحد الأدنى للدالة

د (س) = ٦٠ $س_١$ + ٣٠ $س_٢$

بشرط أن:

$س_١ + س_٢ \leq ٨$

$٦ س_١ + ٤ س_٢ \leq ١٢$

$س_١ \geq ٢٠$

$س_١ \leq$ صفر ، $س_٢ \leq$ صفر .

الحل:

حيث أن النموذج الأصلى يشتمل على قيود هيكلية على صـورة $\leq$ ، لذا نستخدم طريقة مبدول السمبلكس على النحو التالى:

نبدأ أولاً بضرب طرفى كل من القيدين الأول والثانى فـى (-١) ليتـم تحويلهما إلى الصورة $\geq$ ، أما القيد الثالث فيترك كما هو ، لأنه أصـلاً علـى الصورة $\geq$.

$- س_١ - س_٢ \geq - ٨$

$- ٦ س_١ - ٤ س_٢ \geq - ١٢$

$س_١ \geq ٢٠$

ثم نضيف لكل قيد متغير متمم موجب الإشارة ليتحول إلى معادلة كما يلى:

$- س_١ - س_٢ + س_٣ = - ٨$

$- ٦ س_١ - ٤ س_٢ + س_٤ = - ١٢$

$س_١ + س_٥ = ٢٠$

ويكون الجدول الذى يمثل الحل المبدئى (المرحلة الأولى) هو:

المتغيرات الأساسية	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	الثوابت
س$_{٣}$	-١	-١	١	٠	٠	-٨
س$_{٤}$	-٦	-٤	٠	١	٠	-١٢
س$_{٥}$	١	٠	٠	٠	١	٢٠
- د (س)	٦٠	٣٠	٠	٠	٠	صفر

في هذا الحل المبدئى (الغير مسموح به) نجد أن:

المتغيرات الأساسية هى المتممات المضافة وهى: س$_{٣}$ = - ٨ ، س$_{٤}$ = -٢١ ، س$_{٥}$ = ٢٠ .

المتغيرات الغير أساسية هى: س$_{١}$ = صفر ، س$_{٢}$ = صفر ، قيمة دالة الهدف = صفر .

إختبار الأمثلية

بما أن معاملات بعض المتغيرات الأساسية فى عمود الثوابت لها قيماً سالبة لذلك فإن الحل يقبل التحسين.

وسوف نختار المتغير الأساسى الذى له أكبر معامل سالب فى عمود الثوابت وهو س$_{٤}$ كمتغير خارج وبالتالى يكون صف س$_{٤}$ هو الصف المحورى. ولتحديد العمود المحورى نقسم معاملات دالة الهدف الموجودة بالصف الأخير من الجدول على العناصر المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط (مع تجاهل الإشارة الناتجة لخارج القسمة) فنحصل على:

$$٦٠ \div -٦ = ١٠ \quad ، \quad ٣٠ \div -٤ = ٧ \frac{١}{٢}$$

وحيث أن أقل خارج قسمة هو القيمة ٧,٥ والذى يقابل المتغير $س_{٢}$ ، فيكون $س_{٢}$ هو المتغير الداخل ويكون عمود $س_{٢}$ هو العمود المحورى ، وتكون القيمة -٤ هى العنصر المحورى.

المرحلة الثانية

ننتقل بعد ذلك إلى احلال المتغير الداخل $س_{٢}$ محل المتغير الخارج $س_{٤}$ مع تطبيق نفس القواعد التحويلية التى سبق الإشارة إليها فنحصل على الجدول التالى:

المتغيرات الأساسية	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	الثوابت
$س_{٣}$	$\frac{١}{٢}$	٠	١	$-\frac{١}{٤}$	٠	-٥
$س_{٢}$	$\frac{٣}{٢}$	١	٠	$-\frac{١}{٤}$	٠	٣
$س_{٥}$	١	٠	٠	٠	١	٢٠
- د (س)	١٥	٠	٠	$٧\frac{١}{٢}$	٠	- ٩٠

إختبار الأمثلية

حيث أن عمود الثوابت يحتوى على القيمة السالبة - ٥، لذلك فإن الحل الجارى ليس هو الحل الأمثل ويقبل التحسين، وحيث أن هذه القيمة هى القيمة الوحيدة السالبة فى عمود الثوابت، لذلك فإن المتغير الخارج يكون هو $س_{٣}$ ويكون صف $س_{٣}$ هو الصف المحورى.

ولتحديد العمود المحورى نقسم عناصر الصف - د (س) على العناصر المناظرة لها بالصف المحورى السالبة فقط، حيث لا يكون لدينا إلا خارج

القسمة $\frac{١}{٢}$ ٧ ÷ − $\frac{١}{٤}$ = ٣٠، حيث نتجاهل الإشارة − فى خارج القسمة، (بينما لا يجوز قسمة ١٥ على $\frac{١}{٢}$ لأن $\frac{١}{٢}$ قيمة موجبة). وعليه ، فإن المتغير الداخل هو س$_{٤}$ ويكون عمود س$_{٤}$ هو العمود المحورى، وتكون بالتالى القيمة − $\frac{١}{٤}$ هى العنصر المحورى .

المرحلة الثالثة

حيث نقوم بإحلال المتغير س$_{٤}$ محل المتغير س$_{٣}$ ونطبق نفس القواعد التحويلية لنصل إلى الجدول الآتى:

المتغيرات الأساسية	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	الثوابت
س$_{٤}$	−٢	٠	٤	١	٠	٢٠
س$_{٢}$	١	١	−١	٠	٠	٨
س$_{٥}$	١	٠	٠	٠	١	٢٠
− د (س)	٣٠	٠	٣٠	٠	٠	−٢٤٠

إختبار الأمثلية

بتطبيق اختبار الأمثلية على الجدول الثالث، نجد أنه لا يوجد معاملات سالبة للمتغيرات الأساسية فى عمود الثوابت بل أصبحت كلها موجبة، فيكون الحل الحالى هو الحل الأمثل وهو على النحو التالى:

س$_{٢}$ = ٨ ، س$_{٤}$ = ٢٠ ، س$_{٥}$ = ٢٠

س$_{١}$ = س$_{٣}$ = صفر

وتكون أصغر قيمة لدالة الهدف هى:

د (س) = ٢٤٠ .

المراجع

١- **إبراهيم موسى عبد الفتاح (٢٠٠٠م)**، مبادئ فى الرياضيات البحتة وتطبيقاتها التجارية، مكتبة المدينة، الزقازيق.

٢- **حسين محمد السلامونى، حسن محمد على (١٩٩٩م)**، مقدمة فى التأمين ورياضياته، مكتبة المدينة، الزقازيق.

٣- **عبد العزيز فهمى هيكل، مختار محمود الهانسى (١٩٨٤م)**، مبادئ الرياضيات للتجاريين، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت.

٤- **عثمان على شلبى (١٩٩٨م)**، مبادئ الرياضة البحتة، المكتبة العلمية، الزقازيق.

٥- **محمد صلاح الدين صدقى، شوقى سيف النصر (١٩٨٥م)**، مبادئ فى الرياضة للتجاريين، مكتبة نهضة الشرق بحرم جامعة القاهرة.

٦- **محمد عبد السميع عنانى، أنور على جودة (٢٠٠٠م)**، مبادئ فى الرياضة البحتة وتطبيقاتها، مكتبة المدينة، الزقازيق.

الفهــرس

شركة ناس للطباعة

٢٣ ش رشدى عابدين - ٣٩٢٥٣٧/٦

تدريبات عملية

فى مادة

الرياضيات البحتة للتجاريين

اسم الطالب :	....
رقم الجلوس :	....
الدرجة :	....

(١)

تمارين غير محلولة

السؤال الأول:

ما المقصود بكل من:

أ- المجموعة الكلية

ب- المجموعة الجزئية

جـ- فراغ العينة

د- الحدث

السؤال الثاني :

يقوم مصنع بانتاج نوعين من السلع (أ ، ب) فإذا كان لدينا ٥٠ وحده من النوع (أ) ، ٣٠ وحده من النوع (ب) وقام أحد المهندسين بسحب وحدتين (مع الارجاع) من الانتاج بطريقة عشوائية.

فالمطلوب:

أ- ايجاد احتمال كونهما من النوع (أ)

ب- ايجاد احتمال كونهما من النوع (ب)

جـ- ايجاد احتمال كون الأولى من النوع (أ) والثانية من النوع (ب)

د- ايجاد احتمال كون الأولى من النوع (ب) والثانية من النوع (أ) ثم قارن النتيجة فى كل من (ج، ، د)

السؤال الثالث:

إذا علم أن:

$^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$	(أوجد قيمة (ر))
$^{٧}ل_{ر} = ٤٢$	(أوجد قيمة (ر))
$^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$	(أوجد قيمة (ن))
$^{ن}ل_{٢} = ٤٢$	(أوجد قيمة (ن))

السؤال الرابع:

حديقة أطفال بها ١٠٠ طفل، ١٥٠ طفله، ٢٠ مربية أريد تكوين عدد من المجموعات لزيارة بعض الآثار القديمة يتم اختبارها من هذه الحديقة كل مجموعة تحتوى على ثلاث أفراد بشرط أن يكون بينهم مربية فى كل مرة فما هو عدد الطرق الممكن تكوينها لذلك.

السؤال الخامس:

أ- اكتب مفكوك كل من:

$(س + ص)^{٧}$ ، $(٢س + ٧ص)^{٥}$ ، $(س\sqrt{ص} - ص\sqrt{س})^{٥}$ ،

ب- أوجد معاملات $س^{٥}$ فى كل من:

$(٣س + ٧ص)^{٦}$ ، $(٤س + ٦ص)^{٧}$ ، $(٥س + ٥ص)^{٥}$

السؤال السادس:

أ- ثلاث أعداد تكون متوالية حسابية مجموعها ١٢ ومجموع مربعاتها ٥٦ فما هى المتوالية.

ب- متوالية هندسية تتكون من خمسة حدود مجموعها ٢٤٢ ومجموع مربعاتها ٩٥٢٤ فما هى المتوالية.

السؤال السابع:

أوجد مجموع المتسلسلات التالية:

(أ) $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ... + ٥٠^٣$

(ب) $١١^٣ + ٢٢^٣ + ٣٣^٣ + ...$ + إلى ٥٠ حداً

السؤال الثامن:

أ- تكلم عن العناصر الأساسية لأى برنامج رياضى - موضحا مجالات استخدام البرمجة الخطية

ب- المطلوب ايجاد الحل البيانى للنموذج الآتى:

د (س) = ٣ $س_١$ + ٥ $س_٢$ حد أقصى

بشرط أن:

٧$س_١$ + ٦$س_٢$ ≥ ٤٢

٢$س_١$ + ٤$س_٢$ ≥ ٢٠

$س_١$ ≥ ٥

$س_ر$ ≥ صفر ، (ر = ١ ، ٢)